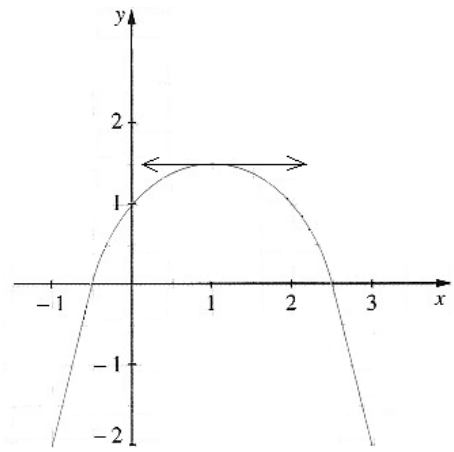
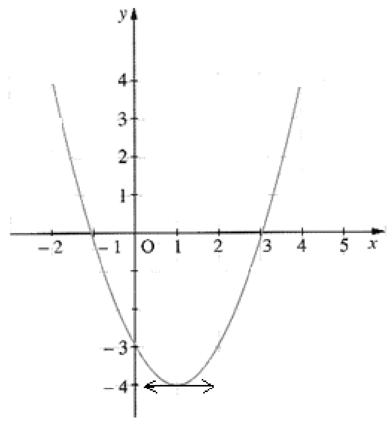
Fonctions polynômes du second degré

Fonction trinôme du second degré.

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b, c réels et a non nul.
Cette fonction est appelée fonction trinôme du second degré.

La courbe représentative de la fonction f est une parabole.
Son allure dépend du signe de a.

$a < 0$	$a > 0$
	

Cette courbe coupe l'axe des abscisses soit en deux points, soit en un seul point, soit en aucun point.

Dans un repère orthogonal, elle est symétrique par rapport à la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Activité

Partie A

Pour chacune des fonctions f suivantes définies sur $\boldsymbol{R}$ par:

$f_1(x) = x^2 - 2x + 2$	$f_2(x) = 3x^2 + 6x + 3$	$f_3(x) = x^2 - 5x + 4$
$f_4(x) = -x^2 + 2x - 3$	$f_5(x) = -x^2 + 4x - 4$	$f_6(x) = -2x^2 + 2x + 4$

Tracer la représentation graphique de la fonction dans un repère orthonormal.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.

Partie B

Pour chacune des équations suivantes de la forme $ax^2+bx+c=0$, calculer le nombre $\Delta=b^2-4ac$.
En utilisant les résultats de la partie A , compléter le tableau ci-dessous. Que constate-t-on ?

Equation	$\Delta = b^2 - 4ac$	Nombre de solutions
$x^2-2x+2=0$		
$3x^2+6x+3=0$		
$x^2-5x+4=0$		
$-x^2+2x-3=0$		
$-x^2+4x-4=0$		
$-2x^2+2x+4=0$		

Equation du second degré.

Une équation du second degré est une équation qui peut s'écrire $ax^2+bx+c=0$, avec *a*, *b*, *c* réels et *a* non nul.

Le discriminant du trinôme est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$

$a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ est la forme canonique du trinôme.

Soit $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, on a alors $f(\alpha) = -\dfrac{\Delta}{4a^2}$. Posons $\beta = f(\alpha)$.

La forme canonique peut s'écrire $a(x-\alpha)^2 + \beta$

p.26 : 10, 11, 12	p.19 : 1, p.26 :9

Nombre de solutions suivant le signe de Δ :

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
L'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	L'équation a une solution double : $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$	L'équation n'a pas de solution

Les solutions de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ sont appelées les racines du trinôme ax^2+bx+c.

p.27 :20, 24	p.21 :1,2, p.27 ;19, 22

Factorisation du trinôme du second degré.

Activité

1. Soit le trinôme du second degré $f(x) = x^2 - 7x - 8$

a. Calculer les racines x_1 et x_2 de ce trinôme.

b. Montrer que $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$

2. Soit le trinôme du second degré $g(x) = x^2 + 4x + 5$

a. Montrer que ce trinôme n'a pas de racine dans ***R***.

b. Montrer que $g(x) = (x+2)^2 + 1$

3. Soit le trinôme du second degré $h(x) = 9x^2 - 6x + 1$

a. Montrer que ce trinôme a une racine double x_0 .

b. Factoriser *h* (*x*) en utilisant une identité remarquable.

4. Soit le trinôme du second degré $p(x) = -2x^2 + 5x - 3$

a. Calculer les racines x_1 et x_2 de ce trinôme.

b. Montrer que $p(x) = -2(x - x_1)(x - x_2)$

	Solutions	Factorisation
$\Delta > 0$	L'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a\ (x - x_1)\ (x - x_2)$
$\Delta = 0$	L'équation a une solution double : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	$a\ (x - x_1)^2$
$\Delta < 0$	L'équation n'a pas de solution	Pas de factorisation

Exercice :

Factoriser les expressions du 9 page26

Signe du trinôme du second degré.

Activité

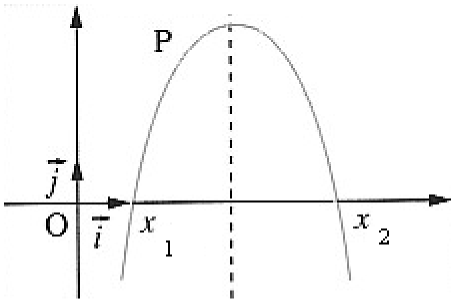
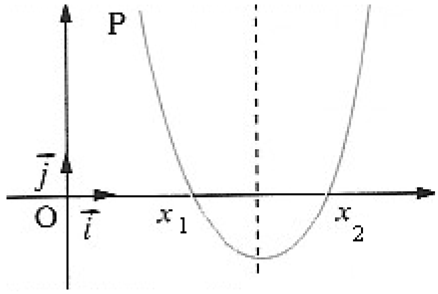
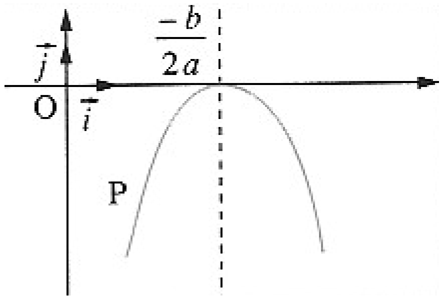
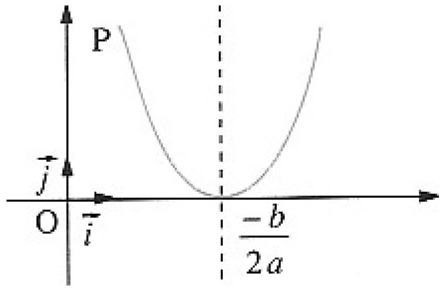
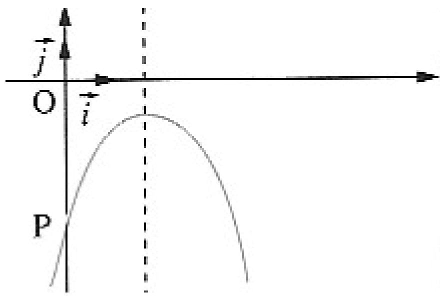
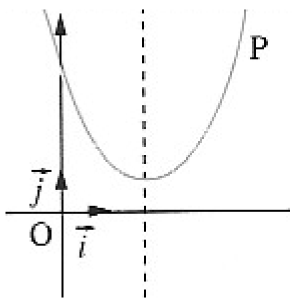
1. Soit le trinôme du second degré $f(x) = 2x^2 - 4x - 30$
a. Factoriser ce trinôme.
b. À l'aide d'un tableau de signes, déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.
2. Soit le trinôme du second degré $g(x) = x^2 - 6x + 11$
a. Montrer que ce trinôme n'a pas de racine dans $\boldsymbol{R}$.
b. Montrer que $g(x) = (x-3)^2 + 2$
c. En déduire que $g(x)$ est strictement positif pour toute valeur de x.
3. Soit le trinôme du second degré $h(x) = 4x^2 - 12x + 9$
a. Montrer que ce trinôme a une racine double x_0.
b. Factoriser $h(x)$
c. En déduire le signe de $h(x)$ pour x réel.
4. Soit le trinôme du second degré $p(x) = -3x^2 + 3x + 6$
a. Factoriser ce trinôme.
b. À l'aide d'un tableau de signes, déterminer le signe de $p(x)$ selon les valeurs du réel x.

	Solutions	Factorisation	Signe
$\Delta > 0$	L'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$	$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ / a 0 $-a$ 0 a
$\Delta = 0$	L'équation a une solution double : $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$	$a\,(x-x_1)^2$	$-\infty$ $x_1 = x_2$ $+\infty$ / a 0 a
$\Delta < 0$	L'équation n'a pas de solution	Pas de factorisation	$-\infty$ $+\infty$ / a

p.28 : 26, 27, 32	p.23 :1,2, p.28 :25, 28

Exercice :
p.28 : 27 Questions supplémentaires :
Résoudre : $f(x) \times g(x) = 0$; $f(x) \times g(x) \geq 0$; $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0$

Interprétation géométrique

<table>
<tr><th></th><th>$a < 0$</th><th>$a > 0$</th></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

p.27 : 17	p.19 : 2, p.27 : 16

Problèmes.

p.29 :34, 39, 42, 65	33 p.86, p.34, p.35

Démonstration.

Considérons l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b, c réels et a non nul.

a étant non nul, on peur factoriser par a. On obtient $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$

a étant non nul, on a $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Or $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ donc $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$

On obtient donc $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$, soit $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$, on obtient $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$

• Lorsque $\Delta < 0$, on a : $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$, on obtient la somme de deux nombres positifs, qui ne peut donc pas être nulle. L'équation n'a pas de solution.

• Lorsque $\Delta = 0$, on a : $-\frac{\Delta}{4a^2} = 0$, on a alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, soit $\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$

L'équation a une solution double : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

• Lorsque $\Delta > 0$, on obtient la différence de deux nombres positifs, donc la différence de deux carrés.

On a $\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$, et donc $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$.

Cette différence se factorise : $\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \times \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = 0$

Soit : $\left[x - \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \times \left[x - \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = 0$

On a donc $x - \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$ ou $x - \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$

L'équation a donc deux solutions $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$