Généralités sur les fonctions.

Rappels : Fonction. Courbe représentative.

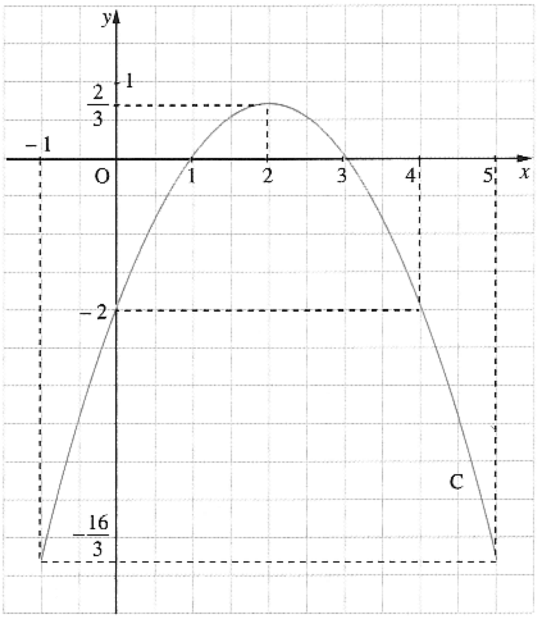
Une fonction de la variable réelle x est déterminée par la donnée d'une partie D de $\boldsymbol{R}$ (appelé ensemble de définition de f) et d'un procédé qui permet d'associer à chaque x de D un nombre réel et un seul.

$$f : \; D \to \boldsymbol{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative d'une fonction f définie sur D est l'ensemble des points M (x ; $f(x)$), où x décrit D.
Pour chaque x de D, il existe un unique point d'abscisse x sur la courbe.

Activité 1

Le plan est muni du repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) . Soit f la fonction définie sur l'intervalle [–1, 5], dont on donne le courbe C :



1. Utiliser ce graphique pour déterminer les valeurs de $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$.

2. Dans quel intervalle varie $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle [–1, 5],?

3. Résoudre graphiquement dans l'intervalle [–1, 5] les équations suivantes

A) $f(x) = 0$ B) $f(x) = -2$ C) $f(x) = 1$ D) $f(x) = \frac{2}{3}$

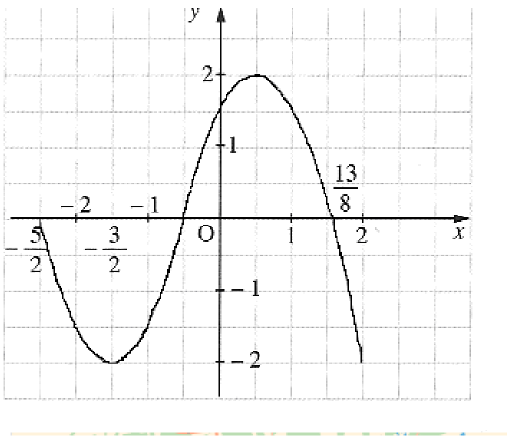
4 a) Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de x comprises entre – 1 et 5, le nombre $f(x)$ est positif.
b) En déduire, dans un tableau, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle [–1, 5]

5. Donner le tableau de variation de f sur l'intervalle [–1, 5].
Pour quelle valeur de x la fonction f admet-elle un maximum?

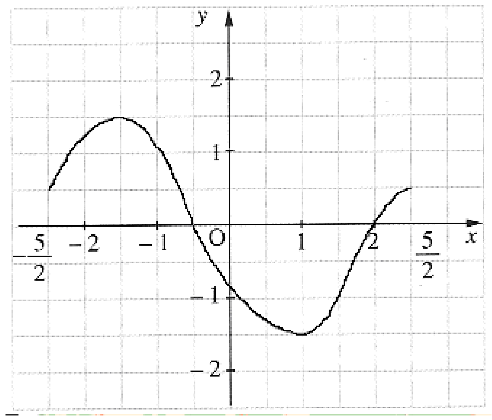
Activité 2

Le plan est muni du repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) . Soit *f* et *g* les fonctions dont les courbes sont données ci-dessous :

f est la fonction définie sur l'intervalle [$-\frac{5}{2}$, 2]



g est la fonction définie sur l'intervalle [$-\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}$]

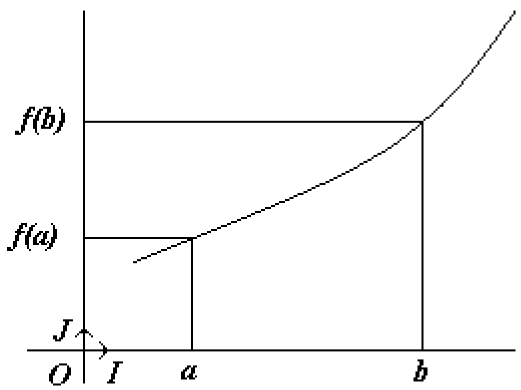


Pour chacune de ces deux fonctions :

- Dresser le tableau de variation de la fonction
- Indiquer les extrema éventuels
- Résoudre $f(x)=0$
- Donner dans un tableau le signe de *f* (*x*) suivant les valeurs de *x*.

Rappels : Variation d'une fonction

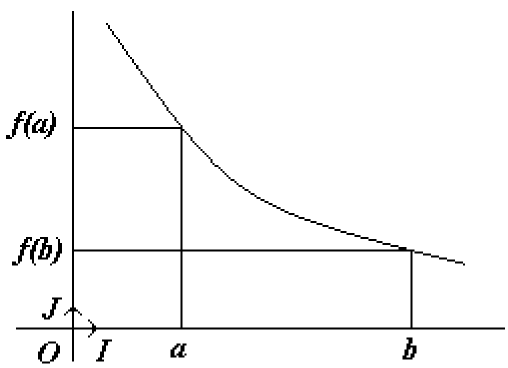
Un fonction *f* définie sur un intervalle I est croissante sur I si pour tous réels *a* et *b* de I tels que *a* < *b* on a $f(a) \leq f(b)$



fonction strictement croissante

$a < b$ *et* $f(a) < f(b)$

Un fonction *f* définie sur un intervalle I est décroissante sur I si pour tous réels *a* et *b* de I tels que *a* < *b* on a $f(a) \geq f(b)$



fonction strictement décroissante

$a < b$ *et* $f(a) > f(b)$

Généralités sur les fonctions.

Rappels : Fonctions de référence

Fonction affine

Soit f la fonction définie par $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$x \mapsto ax + b$ où a et b sont des réels, avec a non nul.
f est une fonction affine
(dans le cas particulier où $b = 0$, f est une fonction linéaire de la forme $f(x) = ax$)

La représentation d'une fonction affine est une droite.
Attention: une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'est pas la représentation d'une fonction affine.

Variations :
Si $a > 0$, f est croissante
Si $a < 0$, f est décroissante.

Fonction carré

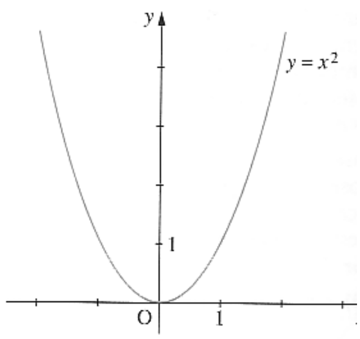
C'est la fonction f définie par $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$x \mapsto x^2$

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

La courbe est appelée parabole

Courbe représentative



La courbe de la fonction carrée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Fonction inverse

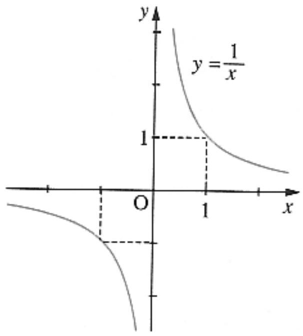
C'est la fonction f définie par $f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	$\|\|$	↘	

Courbe représentative



La courbe est appelée hyperbole

La courbe de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Fonction racine carrée

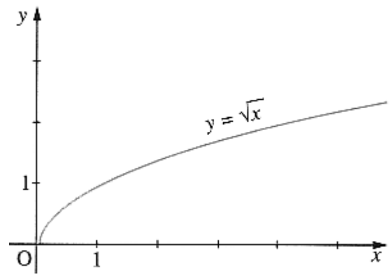
C'est la fonction f définie par $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	

Courbe représentative



On constate que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

Démonstration :

Soit x et y deux réels tels que $0 \leq x < y$.

On a $(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x}) = y - x$

Soit $(\sqrt{y} - \sqrt{x}) = \dfrac{y - x}{(\sqrt{y} + \sqrt{x})}$

Or $y - x > 0$ (car $0 \leq x < y$) et $(\sqrt{y} + \sqrt{x}) > 0$ donc $\sqrt{y} - \sqrt{x} > 0$ soit $\sqrt{y} > \sqrt{x}$

Donc pour tous réels tels que $0 \leq x < y$, on a $\sqrt{x} < \sqrt{y}$

La fonction racine carrée est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$

p.50 : 11, 12, 18	p.43 : 1,2,3 p.50 : 15, 17

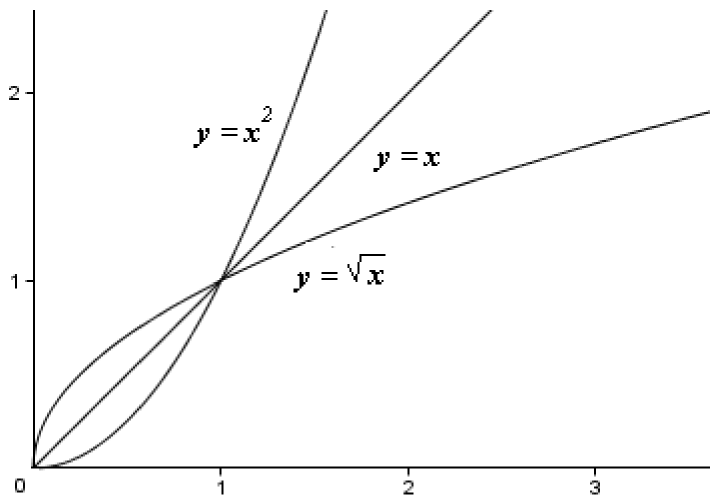
Positions relatives des courbes représentatives des fonctions : $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$

$\sqrt{0} = 0 = 0^2$

Sur $[0\,;1[$ on a $\sqrt{x} > x > x^2$

$\sqrt{1} = 1 = 1^2$

Sur $]1\,;+\infty[$ on a $\sqrt{x} < x < x^2$



Démonstration :

Sur $[0\,;1[$: on a $0 \le x < 1$

soit $0 \le \sqrt{x} < \sqrt{1}$ car la fonction racine est croissante sur $[0\,;+\infty[$

soit $0 \le \sqrt{x} \times \sqrt{x} < \sqrt{1} \times \sqrt{x}$ car $\sqrt{x} > 0$ sur $]0\,;+\infty[$

soit $0 \le x < \sqrt{x}$

De même :

Sur $[0\,;1[$: on a $0 \le x < 1$

soit $0 \le x \times x < 1 \times x$ car $x > 0$ sur $]0\,;+\infty[$

soit $0 \le x^2 < x$

Donc, sur $]0\,;1[$ $\sqrt{x} > x > x^2$

Sur $]1\,;+\infty[$ on a $1 < x$

soit $\sqrt{1} < \sqrt{x}$ car la fonction racine est croissante sur $[0\,;+\infty[$

soit $\sqrt{1} \times \sqrt{x} < \sqrt{x} \times \sqrt{x}$ car $\sqrt{x} > 0$ sur $]0\,;+\infty[$

soit $\sqrt{x} < x$

De même :

Sur $]1\,;+\infty[$: on a $1 < x$

soit $x \times 1 < x \times x$ car $x > 0$ sur $]0\,;+\infty[$

soit $x < x^2$

Donc, sur $]1\,;+\infty[$ $\sqrt{x} < x < x^2$

On constate également que les courbes des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ sur $[0\,;+\infty[$

Généralités sur les fonctions.

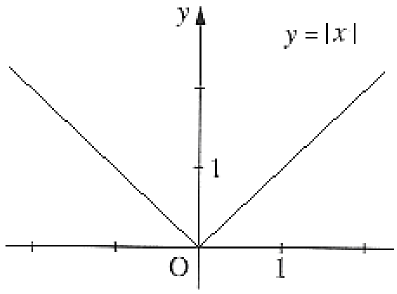
Fonction valeur absolue

C'est la fonction f définie par $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto |x|$

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Courbe représentative



Propriétés : Pour tout réel x :

$|x| = |-x|$; $|x| \geq 0$; $|x| = \sqrt{x^2}$; $\begin{cases} |x| = x & \text{lorsque } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{lorsque } x \leq 0 \end{cases}$

Pour tous réel x et y:

$|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

$|xy| = |x| \times |y|$

Inégalité triangulaire $|x + y| \leq |x| + |y|$

p.50 : 20, 22, 23	p.45 : 1, 2, p.50 : 21

A étant le point d'abscisse a sur un axe et B le point d'abscisse b, AB = $|b - a|$ = $|a - b|$

Exercice 1 :

Sur un axe $(O ; \vec{i})$, on considère les points A, B, C et D d'abscisses respectives : –3, –1, 2, 7
Déterminer les distances : AB, BA, AC, BD, DA

Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations suivantes, en utilisant un raisonnement géométrique puis par le calcul :

$|x + 5| = 4$ $\quad |2x + 5| = 1$ $\quad |x - 3| \leq 7$ $\quad 2|x - 1| \geq 6$

$|x + 5| = |x - 1|$ $\quad |x - 6| = |x + 1|$ $\quad |5 - 4x| \geq 3$

Exercice 3

Résoudre le système : $\begin{cases} |x - 5| < 4 \\ |x - 3| < 7 \end{cases}$

Généralités sur les fonctions.

Sens de variation de la fonction $u+k$

Soit *u* une fonction définie sur un intervalle I et *k* une constante, la fonction $u+k$ définie par $(u+k)(x)=u(x)+k$ et la fonction *u* ont la même variation sur I.

Sens de variation de la fonction λu

Soit *u* une fonction définie sur un intervalle I et λ une constante,
Lorsque $\lambda > 0$ la fonction λu définie par $(\lambda u)(x)=\lambda \times u(x)$ et la fonction *u* ont la même variation sur I.
Lorsque $\lambda < 0$ la fonction λu et la fonction *u* ont des variations opposées sur I.

Sens de variation de la fonction $\sqrt{u}$

Soit *u* une fonction définie sur un intervalle I et positive sur I, la fonction $\sqrt{u}$ définie par $(\sqrt{u})(x)=\sqrt{u(x)}$ et la fonction *u* ont la même variation sur I.

Sens de variation de la fonction $\frac{1}{u}$

Soit *u* une fonction définie sur un intervalle I et non nulle sur I, la fonction $\frac{1}{u}$ définie par $(\frac{1}{u})(x)=\frac{1}{u(x)}$ et la fonction *u* ont des variations opposées sur I.

Exercice : Démontrer les 4 propriétés précédentes

p.51 : 25, 30, 31	p.47 : 1,2, p.51 :34,

Problèmes

p.56 : 42, 75	p.58, 59 DM : 77 p.61