Nombre dérivé

A . Limite d’une fonction en 0.

Activité 1

1 . Compléter le tableau suivant

x	10	1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}
x^2					
x^3					
$\sqrt{x}$					

Que constate-t-on lorsque x devient de plus en plus petit ?

1 . Compléter le tableau suivant

x	10	1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}
$2x+3$					
x^3+3x-1					

Que constate-t-on lorsque x devient de plus en plus petit ?

Définition :

Soit L un réel, la fonction f tend vers L quand x tend vers 0 signifie que $f(x)$ peut être aussi proche que l’on veut de L pourvu que x soit assez proche de 0.

On note $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \mathrm{L}$

Lorsque cette limite existe, elle est égale à $f(0)$

On peut noter aussi : $\lim\limits_{x\to 0} \left| f(x) - \mathrm{L} \right| = 0$ ou encore : $f(x)=\mathrm{L}+\varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2x-6}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-2}{x^2+4x+3}$; $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}+3x-5$

B . Nombre dérivé.

Activité 2

Soit (C) la courbe d'équation $y = \dfrac{x+5}{x-2}$ pour $x \in \ ]2\ ;\ 8]$

Vérifier que le point A (5 ; $\dfrac{10}{3}$) appartient à cette courbe puis construire (C) point par point dans un repère orthonormé d'unité 4 cm.
Soit B le point de (C) d'abscisse 8, tracer (AB) et donner son coefficient directeur.
Soit C le point de (C) d'abscisse 6, tracer (AC) et donner son coefficient directeur.
Soit D le point de (C) d'abscisse 5,25, tracer (AD) et donner son coefficient directeur.
Tracer la droite passant par A et de coefficient directeur $-\dfrac{7}{9}$.

Que peut-on dire de cette droite ?

On observera (en consultant mathonleweb>>1S>> cours>>fonctions>>nombre dérivé animGeoGebra) que lorsque M se rapproche de A, la sécante (AM) prend une position limite appelée la tangente en A à la courbe de la fonction.
La sécante (AM) pivote autour du point A.

Activité 3

On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+5}{x-2}$ pour $x \in \ ]2\ ;\ 8]$

On veut faire un tableau donnant le valeur du coefficient directeur de la sécante pour des valeurs de h de plus en plus proche de 0 puis conjecturer la limite de ce coefficient directeur lorsque *h* tend vers 0.

	A	B	C	D
1	h	5+h	f (5 + h)	coef dir
2	1	6	2,75	-0,58333333
3	0,95	5,95	2,7721519	-0,5907173
4	0,9	5,9	2,79487179	-0,5982906
5	0,85	5,85	2,81818182	-0,60606061
6	0,8	5,8	2,84210526	-0,61403509
7	0,75	5,75	2,86666667	-0,62222222
8	0,7	5,7	2,89189189	-0,63063063
9	0,65	5,65	2,91780822	-0,63926941
10	0,6	5,6	2,94444444	-0,64814815
11	0,55	5,55	2,97183099	-0,657277
12	0,5	5,5	3	-0,66666667
13	0,45	5,45	3,02898551	-0,6763285
14	0,4	5,4	3,05882353	-0,68627451
15	0,35	5,35	3,08955224	-0,69651741
16	0,3	5,3	3,12121212	-0,70707071
17	0,25	5,25	3,15384615	-0,71794872
18	0,2	5,2	3,1875	-0,72916667
19	0,15	5,15	3,22222222	-0,74074074
20	0,1	5,1	3,25806452	-0,75268817
21	0,05	5,05	3,29508197	-0,76502732
22	0	5	3,33333333	#DIV/0!

Quelle formule doit-on entrer dans B2 ?

Quelle formule doit-on entrer dans C2 ?

Quelle formule doit-on entrer dans D2 ?

h = 1 correspond à quel point ?

Vérifier la valeur du coefficient directeur

h = 0,25 correspond à quel point ?

Vérifier la valeur du coefficient directeur

Que signifie le symbole de la case D22 ?

Nombre dérivé

On veut affiner les calculs pour h compris entre 0,1 et 0. Voici le tableau correspondant :

	A	B	C	D
1	h	5+h	f (5 + h)	coef dir
2	0,1	5,1	3,25806452	-0,75268817
3	0,09	5,09	3,26537217	-0,75512406
4	0,08	5,08	3,27272727	-0,75757576
5	0,07	5,07	3,28013029	-0,76004343
6	0,06	5,06	3,2875817	-0,76252723
7	0,05	5,05	3,29508197	-0,76502732
8	0,04	5,04	3,30263158	-0,76754386
9	0,03	5,03	3,31023102	-0,77007701
10	0,02	5,02	3,31788079	-0,77262693
11	0,01	5,01	3,3255814	-0,7751938
12	0	5	3,33333333	#DIV/0!

Lorsque h tend vers 0, vers quelle valeur semble tendre le coefficient directeur de la sécante ?

Pour $h \neq 0$, vérifier que le coefficient directeur de la sécante $\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}$ est égal à $\dfrac{-7}{9+3h}$

Quelle est sa limite lorsque h tend vers 0 ?

Que représente cette limite ?

<u>Définition du nombre dérivé :</u>

Soit une fonction f définie sur un intervalle contenant a et $a + h$ avec $h \neq 0$.

Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est le rapport : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Dire que f est dérivable en a et que son nombre dérivé est $f'(a)$ équivaut à dire que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

ou que

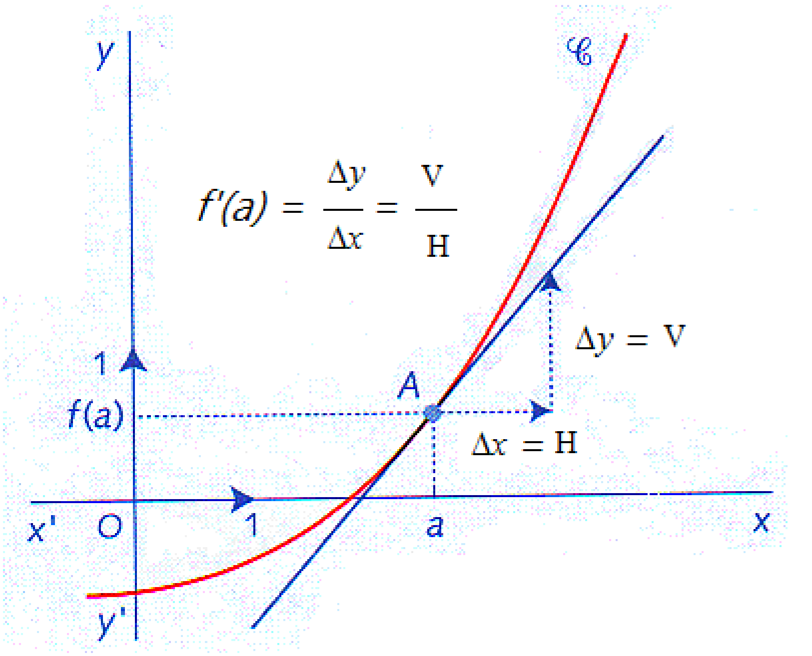
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

p.74 :10, 12	p.67 :1, p.74 :13

Nombre dérivé

Aspect géométrique :

Le nombre dérivé de f en a noté $f'(a)$ représente la pente (c'est à dire le coefficient directeur) de la droite tangente à la courbe représentative de f au point A (a ; $f(a)$).
Dans ce cas la tangente a pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.



Exercice 2

La courbe représentative C d'une fonction f admet au point A (–1 ; 2) une tangente qui passe par B (3 ; 1)
Déterminer $f(-1)$ et $f'(-1)$ puis déterminer une équation de cette tangente.

p.74 : 16, 19 à 21	p.67 :2