VARIABLE ALÉATOIRE.

Définition.

Ω étant l'univers associé à une épreuve aléatoire, définir une variable aléatoire sur Ω c'est associer un réel à chaque éventualité de Ω .
(Attention, une variable aléatoire est une fonction).

Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

X étant une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω , définir la loi de probabilité de X, c'est associer à chaque valeur x_i prise par X, la probabilité p (X = x_i)

Exemple

Une roue de loterie est partagée en 12 secteurs égaux : 6 bleus, 3 verts, 2 jaunes et 1 rose .
Lors d'une partie, on fait tourner la roue et un repère fixe désigne la couleur obtenue à l'arrêt.
Le joueur gagne 50 euros si la roue s'arrête sur la zone rose, 10 si la roue s'arrête sur la zone jaune, 0 si la roue s'arrête sur la zone verte et il perd 10 euros si la roue s'arrête sur la zone bleue.
Définir une variable aléatoire correspondant à cette épreuve et déterminer sa loi de probabilité.

Eventualités	Variable aléatoire $\longrightarrow$	Réel associé x_i	Loi de probabilité $\longrightarrow$	Probabilité p (X = x_i).
Arrêt sur bleu		– 10		1/2
Arrêt sur vert		0		1/4
Arrêt sur jaune		10		1/6
Arrêt sur rose		50		1/12

Ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire :

X = { –10, 0, 10, 50 }

Loi de probabilité de X

x_i	–10	0	10	50
p (X = x_i).	1/2	1/4	1/6	1/12

p.288 : 7, 9, 10	p.281 : 1, 2, p.288 : 8, 11

Espérance mathématique d'une variable aléatoire, Variance, Ecart-type.

Soit { x_1 , x_2 , ... , x_n } l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.
Pour tout nombre entier i tel que $1 \leq i \leq n$ on pose $p_i = p (X = x_i)$.

On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X le nombre réel noté E (X) défini par:

$$E (X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$$

Si E (X) = 0 , on dit que X est une variable centrée.

On appelle variance de la variable aléatoire X le nombre réel positif noté V (X) défini par:

$$V (X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E (X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E (X)^2$$

Si V (X) = 1 , on dit que X est une variable réduite.

On appelle écart-type de la variable aléatoire X le nombre réel positif noté σ (X) défini par:

$$\sigma (X) = \sqrt{V(X)}$$

Propriétés : Soit a et b deux réels : $E (aX + b) = a E(X) + b$ et $V (aX) = a^2 V(X)$

Exercice : Dans l'exemple précédent déterminer l'espérance de la variable 2X+3 et la variance de la variable 4X :

p.288 : 12, 14, 15	p.283 : 1, 2, p.288 : 13, 16