Produit scalaire dans le plan.

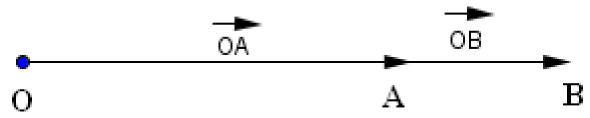
Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires, A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u} \bullet \vec{v}$ est **le nombre réel** défini par :

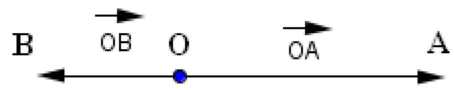
$\vec{u} \bullet \vec{v} = OA \times OB$

lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens.



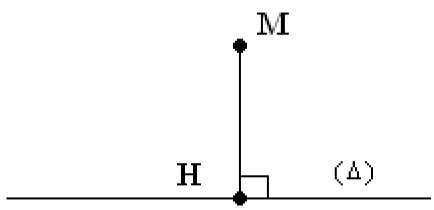
$\vec{u} \bullet \vec{v} = -OA \times OB$

lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires.



Projection orthogonale d'un point sur une droite.

Soit (Δ) une droite et M un point du plan.
Le projeté orthogonal de M sur (Δ) est le point H de (Δ) tel que (Δ) et (MH) soient perpendiculaires.

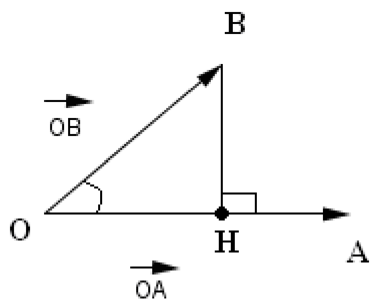


Produit scalaire de deux vecteurs quelconques du plan.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u} \bullet \vec{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OH}$, H étant le projeté orthogonal de B sur (OA)

On a donc : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$



Norme d'un vecteur du plan.

Soit $\vec{u}\ (x\ ;y)$ dans un repère orthonormé, A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\left\|\vec{u}\right\| = AB$.

p.217 : 28, p.217 : 35, 36, 37, 42, 43, 45	p.213 : 1, 2 p.219 : 47

Produit scalaire dans le plan.

Propriétés du produit scalaire :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, et λ un réel.

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\vec{u}\bullet\vec{u}}\ ; \qquad \vec{u}\bullet\vec{u} = \vec{u}^{\,2} = \left\|\vec{u}\right\|^2\ ; \qquad \vec{u}\bullet\vec{v} = \vec{v}\bullet\vec{u}\ ;$$

$$(\lambda\vec{u})\bullet\vec{v} = \vec{u}\bullet(\lambda\vec{v}) = \lambda\times(\vec{u}\bullet\vec{v})$$

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\,\vec{u}\bullet\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2\ ; \qquad (\vec{u}-\vec{v})^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 - 2\,\vec{u}\bullet\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2\ ;$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\bullet(\vec{u}-\vec{v}) = \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2$$

De: $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 - 2\,\vec{u}\bullet\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$ on déduit : $\vec{u}\bullet\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - (\vec{u}-\vec{v})^2\right)$

Utilisation: Dans un triangle ABC, $\vec{AB}\bullet\vec{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

et de $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\,\vec{u}\bullet\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$ on déduit : $\vec{u}\bullet\vec{v} = \frac{1}{2}\left((\vec{u}+\vec{v})^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs : $\vec{u}\bullet(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\bullet\vec{v} + \vec{u}\bullet\vec{w}$

p.217 : 30, 32 ; p.216 : 14, 15	p.209 : 1, 2

Expression analytique du produit scalaire :

Soit $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, $\vec{u}\bullet\vec{v} = xx' + yy'$

p.216 : 19, 20, 21, 24	p.211 : 1

Norme d'un vecteur et produit scalaire.

Soit $\vec{u}\,(x\,;y)$ dans un repère orthonormé, A et B deux points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$, alors :

$AB = \left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\vec{u}\bullet\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2}$

p.216 : 10, 11, p.217 : 25	p.216 : 13

Problèmes

p.219 : 50, 52 p.226 : 81, 86	p.224, 225