Trigonométrie

Mesures des angles orientés

Le radian (rad)

Un angle de 1 radian est un angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 (unité de longueur) sur un cercle de rayon 1 (unité de longueur).
Le périmètre d'un cercle de rayon 1 (unité de longueur) étant égal à 2π , un angle de π radians correspond à un angle de 180°.

p.194 : 13, 14	p.187 : 2, p194 : 12

Angles orientés de vecteurs non nuls

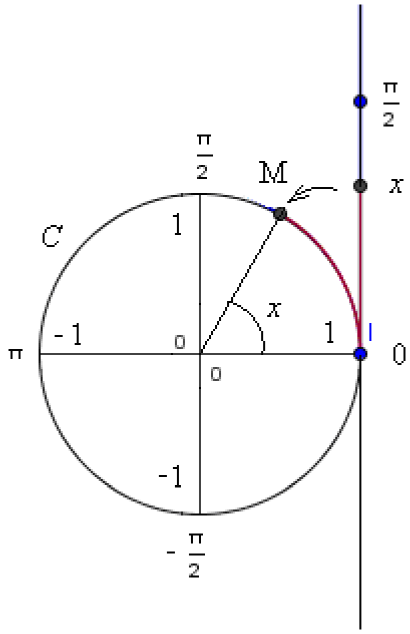
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le couple ($\vec{u}$; $\vec{v}$) est appelé angle orienté de vecteurs.

Cercle trigonométrique et angles orientés

Le cercle trigonométrique est un cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens trigonométrique (ou sens positif)

En enroulant la droite graduée sur le cercle *C* d'origine I, à tout réel *x* on associe un unique point M sur *C*, image de *x*.

x est une mesure en radian de l'angle $(\vec{OI};\vec{OM})$



p.194 : 9, 11, 17, 20	p.187 : 2, p.194 : 10, 18

Trigonométrie

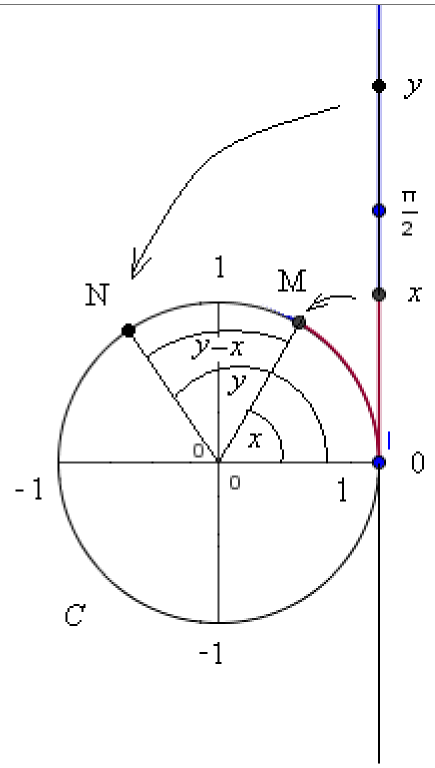
Soient M et N deux points du cercle trigonométrique, où M est l'image de *x* et N l'image de *y*.

On appelle mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$ le nombre réel $y-x$

L'angle orienté $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$ admet une unique mesure dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$. Cette mesure est appelée mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$.

Soit α la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$, toutes les autres mesures de cet angle sont de la forme $\alpha+k2\pi,\ k\in Z$

On a aussi : $\widehat{MON}=|\alpha|$ en radians



Propriétés des angles orientés

Les angles orientés $(\vec{u};\vec{v})$ et $(\vec{u'};\vec{v'})$ sont égaux si et seulement si il existe *k* entier relatif tel que $(\vec{u'};\vec{v'})=(\vec{u};\vec{v})+k2\pi$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens si et seulement si $(\vec{u};\vec{v})=0\ [2\pi]$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire si et seulement si $(\vec{u};\vec{v})=\pi\ [2\pi]$

Relation de Chasles : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls $(\vec{u};\vec{v})=(\vec{u};\vec{w})+(\vec{w};\vec{v})$

Repère orthonormé direct ou indirect

Un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$ unitaires est

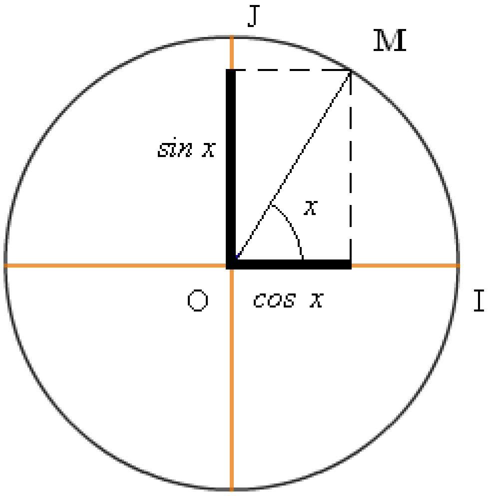
- direct lorsque $(\vec{i};\vec{j})=\frac{\pi}{2}$
- indirect lorsque $(\vec{i};\vec{j})=-\frac{\pi}{2}$

p.195 : 22, 23, 24, 25	p.189 : 1, 2, 3, p.194 : 21

Trigonométrie

Cosinus et sinus d'un angle orienté

Soit M l'image de x sur le cercle trigonométrique.



Le cosinus de x, noté cos x, est l'abscisse du point M dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Le sinus de x, noté sin x, est l'ordonnée du point M dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Propriétés

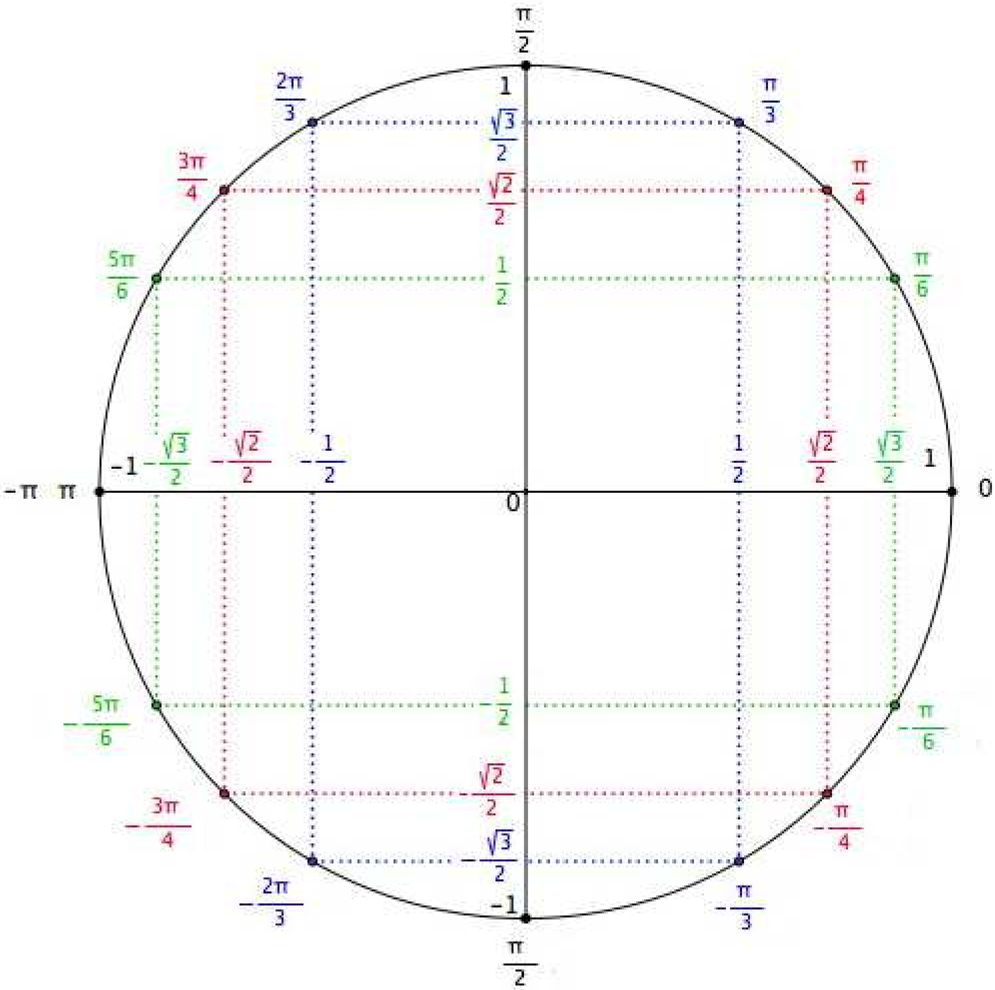
Pour tout réel x et pour tout entier relatif k on a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$

Trigonométrie

Tableau des valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

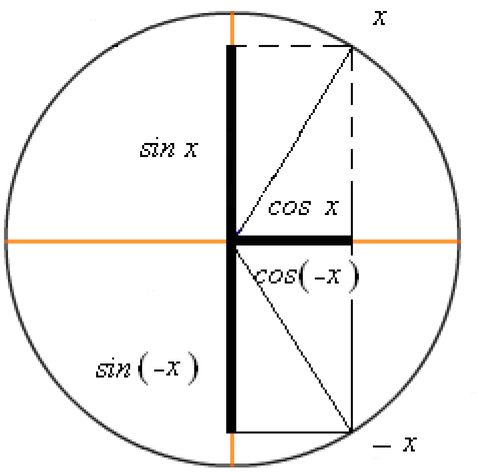


Trigonométrie

Cosinus et sinus d'angles associés

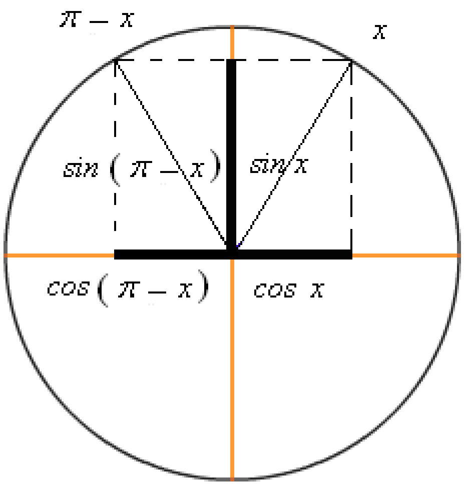
Angles opposés : x et $-x$

$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$



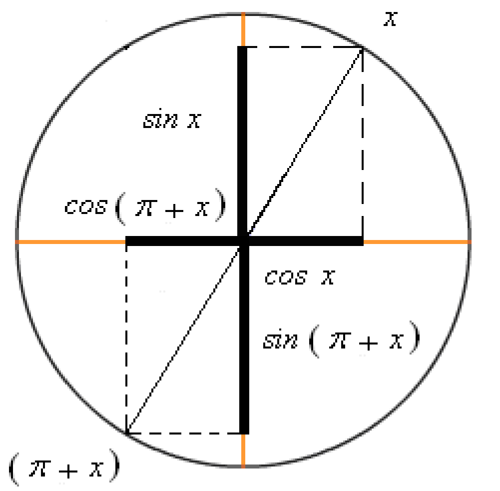
Angles supplémentaires : x et $\pi - x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$



x et $\pi + x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$

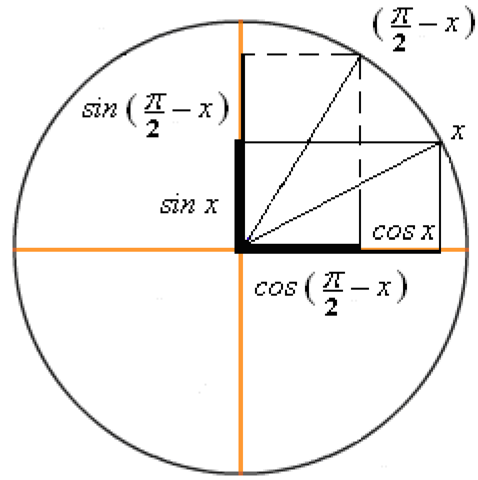


Trigonométrie

Angles complémentaires : x et $\frac{\pi}{2} - x$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

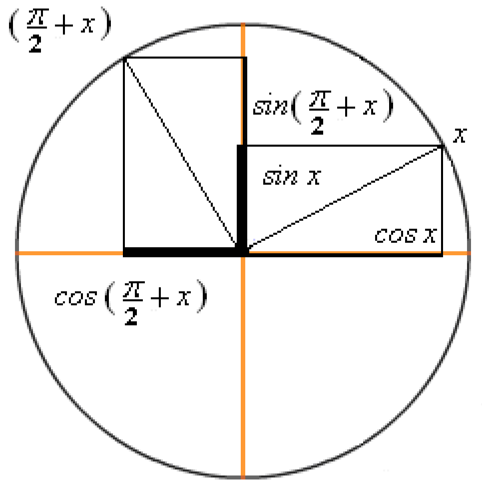
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$



x et $\frac{\pi}{2} + x$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$



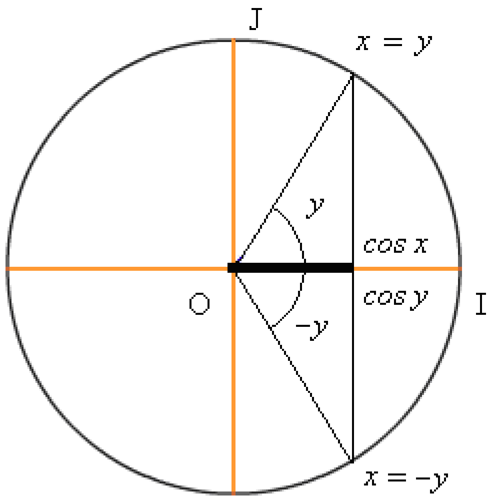
p.195 : 28, 29, 30, 31, 32	p.187 : 3, p.191:1, p.195 : 27, 33, 34, 35

Trigonométrie

Equations trigonométriques : cos x = cos y

L'équation cos x = cos y a pour solutions :

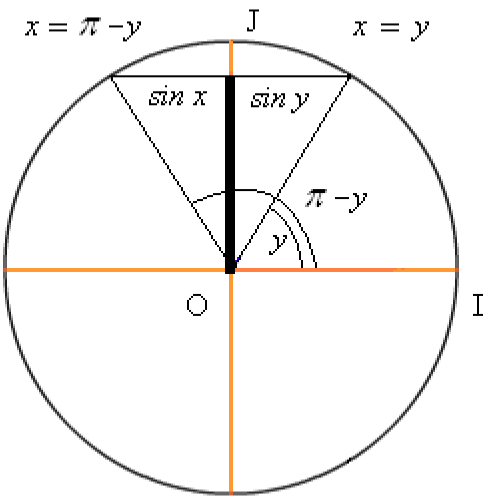
$$\begin{cases} x = y + k \times 2\pi \\ ou \qquad\qquad\qquad k \in Z \\ x = -y + k \times 2\pi \end{cases}$$



Equations trigonométriques : sin x = sin y

L'équation sin x = sin y a pour solutions :

$$\begin{cases} x = y + k \times 2\pi \\ ou \qquad\qquad\qquad k \in Z \\ x = \pi - y + k \times 2\pi \end{cases}$$



p.197 : 42, 43	p.191 : 2, 3

Problèmes :

p.202 : 61, 62, 63, 64, 69	p.200, p.201, p.189 : 2, 3 DM : 65 p.202, 68 p.203

Trigonométrie