Vecteurs du plan :

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- Une direction : la droite (AB)
- Un sens : de A vers B
- Une norme : $\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = AB$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ équivaut à A = B (les points A et B sont confondus)

Egalité de deux vecteurs

Deux vecteurs non nuls sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même norme.
A, B, C, et D étant quatre points distincts du plan, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme
- Les segments [AC] et [BD] ont même milieu

Opérations sur les vecteurs

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels k et k'

$(-1)\,\vec{u} = -\vec{u}$

$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\,\vec{u} + k\,\vec{v}$

$(k + k')\,\vec{u} = k\,\vec{u} + k'\,\vec{u}$

$(k\,k')\,\vec{u} = k\,(k'\,\vec{u})$

$k\,\vec{u} = \vec{0}$ est équivalent à $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Exercice 1

ABCD est un parallélogramme.

Construire les points F et G tels que : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$

Coordonnées d'un vecteur du plan.

Soit (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan. Les trois propositions ci-dessous sont équivalentes.

- $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$
- $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans ($\vec{i}$, $\vec{j}$)
- M (x; y) dans (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$)

Soit A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) dans(O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Coordonnées du milieu d'un segment.

Soit (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan. Soit A ($x_A\,;y_A$) et B ($x_B\,;y_B$) dans(O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

I milieu de [AB] a pour coordonnées : $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

Exercice 2

Soit ABCD un parallélogramme.

Soit E le point défini par $\vec{BE} = 2\vec{AC} + 3\vec{AD}$

Déterminer, dans le repère (A ; $\vec{AB}, \vec{AD}$) les coordonnées des points : A, B, C, D, E, les coordonnées du milieu de [BC] et celles du centre du parallélogramme.

Exercice 3

On considère les points A (–2 ;–2), B (3 ;1) et C (5 ;3) dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$)
Déterminer les coordonnées du point D pour lequel ABCD est un parallélogramme en utilisant successivement les propriétés suivantes :

- $\vec{AB} = \vec{DC}$
- $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BC}$
- Les segments [AC] et [BD] ont même milieu

Exercice 4

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées $\vec{u}$ (1 ;2) et $\vec{v}$ (–1 ;2)
Les points A, B, C et D sont définis par :
$\vec{OA} = 2\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{OB} = \vec{u} + 2\vec{v}$, $\vec{OC} = -2\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{OD} = -\vec{u} - 2\vec{v}$
Calculer les coordonnées de A, B, C et D et faire une figure.
Montrer que ABCD est un parallélogramme

Norme d'un vecteur du plan.

Soit $\vec{u}$ (x ; y) dans un repère orthonormé, A et B deux points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$, $\left\|\vec{u}\right\| = AB = \sqrt{x^2+y^2}$

Avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, on a $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Exercice 5

On considère les points A (–2 ;$-\dfrac{3}{2}$), B (2 ;$\dfrac{1}{2}$) et C (–1 ;$\dfrac{3}{2}$) dans le repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$)
Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.

Dire que des $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs sont colinéaires signifie que l'on peut écrire $\vec{v} = k\,\vec{u}$ avec k réel .

Les vecteurs $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ; y') sont colinéaires lorsque $x' = kx$ et $y' = ky$ soit $xy' - yx' = 0$

A, B, C, et D étant quatre points distincts du plan :

Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires les points A, B et C sont alignés

p.170 : 11, 12	p.163 : 1, 2, p.170 : 13, 14

Exercice 6

On considère les points A (2 ;2), B (–2 ;0), C (–4 ;–1), D (2 ; $-\frac{1}{2}$) et E (–1 ;–2) dans le repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$)

Montrer que A, B et C sont alignés

Montrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles

Exercice 7

On considère les points A (2 ;3), B (0 ;–2), C (–4 ;0) et E (4 ;–16) dans le repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$)

Soit D le symétrique de B par rapport à C et F le point tel que : $\overrightarrow{BF} = 2\,\overrightarrow{AB}$

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EF}$

Quelle conclusion peut-on en tirer pour les droites (BD) et (EF) ?

Vecteur directeur d'une droite.

Un vecteur directeur d'une droite *d* du plan est un vecteur $\vec{u}$ non nul défini par deux points distincts de *d*.

Tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$, c'est-à-dire de la forme $k\,\vec{u}$ avec k réel non nul, est un vecteur directeur de la droite *d*

p.170 : 18	p.163 : 3, p.170 : 17

Equation d'une droite

Propriété caractéristique

Soit la droite *d* passant par un point A du plan et $\vec{u}$ un vecteur directeur de *d*.

Un point M appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Equation cartésienne d'une droite

Dans le plan muni d'un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), *a, b* et *c* étant des réels non tous nuls, toute droite *d* admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de *d*.

Equation cartésienne réduite d'une droite

Dans le plan muni d'un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), *a* étant un réel et *m* et *p* étant des réels non tous nuls, toute droite *d* admet une équation cartésienne réduite de la forme $y = mx + p$ ou $x = a$.

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de *d*.

m est le coefficient directeur de la droite *d*, *p* est l'ordonnée à l'origine.

p.170 : 19, 21, 22, 23	p.165 : 1, 2, p.170 : 20, 22

Position relative de deux droites

Soit *d* la droite d'équation $ax + by + c = 0$ et *d'* la droite d'équation $a'x + b'y + c' = 0$
d et *d'* sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, soit $ab' - a'b = 0$

Soit *d* la droite d'équation $y = mx + p$ et *d'* la droite d'équation $y = m'x + p'$
d et *d'* sont parallèles si et seulement si $m = m'$

p.171 : 24, 25, 27, 29, 31	p.165 : 3, p.171 : 28

Décomposition d'un vecteur du plan

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.

Tout vecteur $\vec{w}$ du plan peut s'écrire de façon unique sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$ avec *a* et *b* réels.

Un point et deux vecteurs non colinéaires du plan forment un repère du plan.

p.171 : 33, 36	p.167 : 1, 2, p.171 : 34, 35

Problèmes

p.173 : 43, p.174 : 46, p.180 : 72	p.178, 179