TEA. Fonction dérivée

Exercice 1 Déterminer dans chacun des cas la fonction dérivée de la fonction f définie sur I.

A) I = $\mathbb{R}$ $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$

B) I = $\mathbb{R}$ $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 7$

C) I = $\mathbb{R}$ $f(x) = (2x^2+x-1)(3-2x)$

D) I = $\mathbb{R}$ $f(x) = (3x-1)(x^4+1)$

E) I =] 0 ;+∞[$f(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{x}{5}$

F) I = $\mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+x+1}$

G) I =] 0 ;+∞[$f(x) = \dfrac{1-2x}{x^2} + \dfrac{3}{x^2+1}$

H) I = $\mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{x^2-5x+3}{x^2-x+1}$

I) I =] 0 ;+∞[$f(x) = 2 + \dfrac{1}{3x+1}$

J) I = $\mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+x+1)}$

K) I = $\mathbb{R}$ $f(x) = (2x+3)(1-2x)$

L) I =] 1 ;+∞[$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x-1}$

M) I = $\mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+5}{2x^2-x+6}$

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1-2x)(3x+1)$.

a) En considérant f comme un produit de fonctions, calculer la dérivée de f et l'écrire sous la forme d'une somme la plus simple possible.

b) Développer $f(x)$ puis calculer la dérivée de f sous cette forme.

c) Comparer les résultats.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur [0 ; 5] par : $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$.

1. Calculer la dérivée de f
2. Vérifier que $f(x) = 3x-3+\dfrac{3}{x+1}$
3. Calculer la dérivée de f sous la forme précédente et comparer avec le résultat obtenu à la question 1.

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2+1{,}5\,x+1$.

Construire la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) , ainsi que la tangente à la courbe au point A d'abscisse 2.

1. Lire le nombre dérivé de f en 2.
2. Déterminer le nombre dérivé de f en 2 en utilisant le taux de variation
3. Déterminer la dérivée de f, puis calculer $f'(2)$ et comparer avec les résultats précédents
4. Déterminer par le calcul une équation de la tangente à la courbe au point A.

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur [–0,5 ; 3] par : $f(x) = \dfrac{-x+1}{x+1}$.

Construire la courbe de *f* dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} , \vec{j})$, ainsi que la tangente à la courbe au point A d'abscisse 1.

1. Lire le nombre dérivé de *f* en 1.
2. Déterminer le nombre dérivé de *f* en 1 en utilisant le taux de variation
3. Déterminer la dérivée de *f*, puis calculer $f'(1)$ et comparer avec les résultats précédents
4. Déterminer par le calcul une équation de la tangente à la courbe au point A.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\boldsymbol{R}$ par: $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On sait de plus que $f(1) = 4$, $f'(1) = 0$ et $f'(0) = 2$.
a. Exprimer $f'(x)$ à l'aide de a, b et x.
b. En utilisant les valeurs données, écrire un système de trois équations à trois inconnues a, b et c.
c. Résoudre ce système et déterminer alors l'expression de $f(x)$.

Correction

Exercice 1 Déterminer dans chacun des cas la fonction dérivée de la fonction *f* définie sur I.

A $f'(x) = 4x - 5$

B $f'(x) = 3x^2 + 6x + 2$

C $f'(x) = (4x+1)(3-2x) + (2x^2 + x - 1)\times(-2)$
$= -12x^2 + 8x + 4$

D $f'(x) = 3\times(x^4+1) + (3x-1)\times 4x^3$
$= 15x^4 - 4x^3 + 3$

E $f'(x) = -\dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{5}$

F $f'(x) = \dfrac{x^2 + x + 1 - (x-3)\times(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$
$= \dfrac{-x^2 + 6x + 2}{(x^2+x+1)^2}$

G $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - (1-2x)\times 2x}{x^4} - \dfrac{3\times 2x}{(x^2+1)^2}$
$= \dfrac{-6x-2}{x^3} - \dfrac{6x}{(x^2+1)^2}$

H $f'(x) = \dfrac{(2x-5)(x^2-x+1) - (x^2-5x+3)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$
$= \dfrac{-2x^2 + 2x - 2}{(x^2-x+1)^2}$

I $f'(x) = -\dfrac{3}{(3x+1)^2}$

J $f'(x) = -\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

K $f'(x) = 2(1-2x) + (2x+3)(-2) = -8x - 4$

L $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(2x-1) - \sqrt{x}\times 2}{(2x-1)^2}$
$= \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(2x-1) - \dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\sqrt{x}\times 2}{(2x-1)^2}$
$= \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(2x-1) - \dfrac{4x}{2\sqrt{x}}}{(2x-1)^2} = \dfrac{-2x-1}{2\sqrt{x}\,(2x-1)^2}$

M $f'(x) = \dfrac{(4x-3)(2x^2-x+6) - (2x^2-3x+5)(4x-1)}{(2x^2-x+6)^2} = \dfrac{4x^2 + 50x - 23}{(2x^2-x+6)^2}$

Exercice 2 :

a) $f'(x) = (-2)(3x+1) + (1-2x)\times 3 = -6x - 2 + 3 - 6x = -12x + 1$

b) $f(x) = (1-2x)(3x+1) = 3x - 6x^2 + 1 - 2x = -6x^2 + x + 1$
$f'(x) = -12x + 1$

c) On obtient bien le même résultat, yeeaah !

Exercice 3   Soit f la fonction définie sur [0 ; 5] par : $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$.

1. $f'(x) = \dfrac{6x(x+1) - 3x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{3x^2 + 6x}{(x+1)^2}$

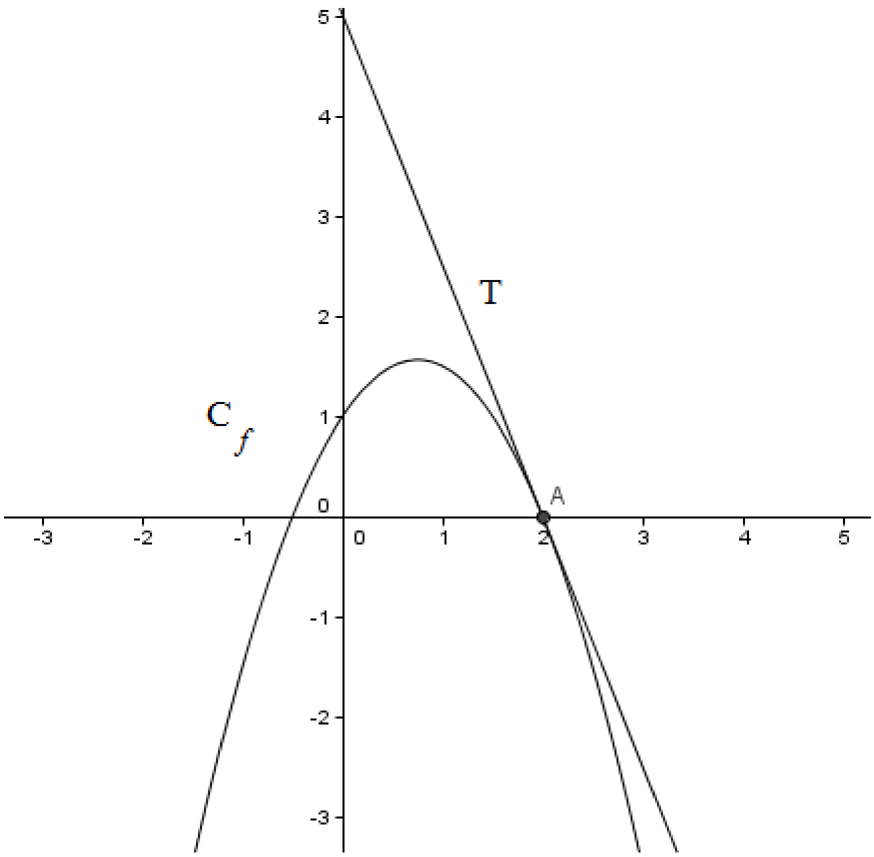
2. Calculons $3x - 3 + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{(3x-3)(x+1)}{x+1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{3x^2}{x+1} = f(x)$

3. $f'(x) = 3 - \dfrac{3}{(x+1)^2} = 3\dfrac{(x+1)^2}{(x+1)^2} - \dfrac{3}{(x+1)^2} = \dfrac{3x^2+6x+3-3}{(x+1)^2} = \dfrac{3x^2+6x}{(x+1)^2}$

On obtient le même résultat. Content !

Exercice 4

$f(x) = -x^2 + 1{,}5x + 1$.



1) Considérons le point A et le point d'abscisse 3 sur T. Il semblerait que : $f'(2) = \dfrac{-2{,}5 - 0}{3-2} = -2{,}5$

2) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(2+h)^2 + 1{,}5\times(2+h) + 1 - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(2+h)^2 + 1{,}5\times(2+h) + 1}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h^2 - 2{,}5h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (-h - 2{,}5) = -2{,}5$

3) $f'(x) = -2x + 1{,}5$ et donc $f'(2) = -2\times 2 + 1{,}5 = -2{,}5$

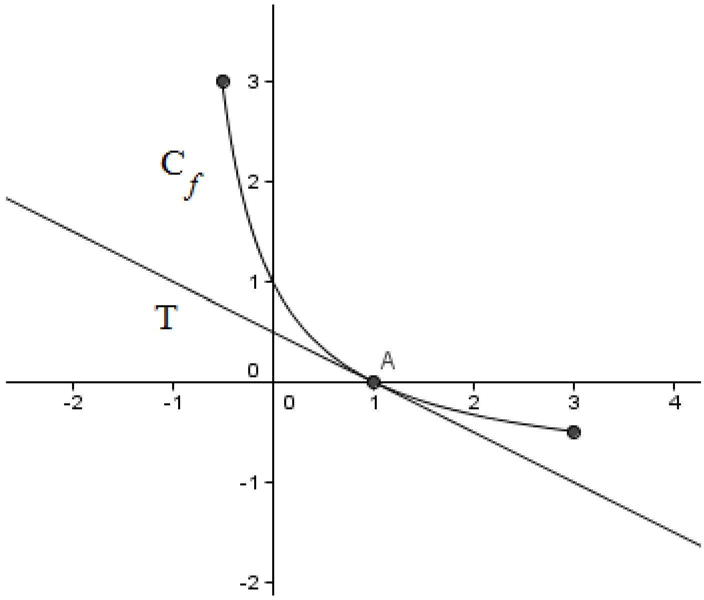
On obtient le même résultat

4) Equation de la tangente en A : $y = f'(2)(x-2) + f(2) = -2{,}5(x-2) + 0 = -2{,}5x + 5$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur [–0,5 ; 3] par :

$f(x) = \dfrac{-x+1}{x+1}$.



1) Considérons le point A et le point d'abscisse 2 sur T. Il semblerait que : $f'(1) = \dfrac{-0{,}5-0}{2-1} = -0{,}5$

Déterminer par le calcul une équation de la tangente à la courbe au point A.

2) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{-(1+h)+1}{(1+h)+1}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{h+2}\times\dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{h+2} = -\dfrac{1}{2}$

3) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2}$ et donc $f'(1) = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

On obtient le même résultat

4) Equation de la tangente en A : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -0{,}5(x-1)+0 = -0{,}5x+0{,}5$

Exercice 6

a) $f'(x) = 2ax+b$

b) $\begin{cases} f(1) = 4 \Leftrightarrow a+b+c = 4 \\ f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2a+b = 0 \\ f'(0) = 2 \Leftrightarrow b = 2 \end{cases}$ on obtient alors $b = 2$ puis $a = -1$ et enfin $c = 3$

c) d'où $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.