1S Travail en autonomie Vecteurs 1

Exercice 1.

Elaborer sous Algobox un algorithme permettant de déterminer si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Exercice 2.

Soit *A*, *B*, *C* et *D* quatre points du plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit *x* un nombre réel, on considère les vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4x+1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}$

1. Déterminer toutes les valeurs de *x* pour lesquelles ces vecteurs sont colinéaires.
2. Existe-t-il des valeurs de *x* pour lesquelles le quadrilatère *ABCD* est un parallélogramme ?

Exercice 3.

Soit *A*(4 ; 2), *B*(–2 ; 6), et *C* (–2,46 ; 1,2) trois points du plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Construire ce repère et placer ces points.

1. On considère le point *I* tel que $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Déterminer ses coordonnées puis placer ce point dans le repère.
2. Faire de même avec le point M tel que $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BM}$ et le point N tel que $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CA}$
3. On considère le point *J* tel que $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Déterminer ses coordonnées puis placer ce point dans le repère.
4. Montrer que les points *M*, *J* et *N* sont alignés en passant par les coordonnées.
5. Placer le point *G* tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
6. Montrer que les points *G*, *I* et *C* sont alignés sans passer par les coordonnées.

(On pourra montrer que $2\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}$)

Exercice 4.

Soit $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan et (d_1) la droite d'équation : $6x+2y+3=0$

1. Déterminer un vecteur directeur de (d_1)
2. Soit A ($-\frac{12}{5};2$). Déterminer une équation de la droite (d'_1) parallèle à (d_1) et passant par A.
3. Soit $\vec{u}$ (3 ;1). Déterminer une équation de la droite (d_2) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. On notera D le point d'intersection entre les droites (d_1) et (d_2). Déterminer les coordonnées de D.
4. Soit le point C(0;–1,5).

Déterminer une équation de la droite (d'_2) passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}$.
On notera B le point d'intersection entre les droites (d_2) et (d'_2) . Déterminer les coordonnées de B.

5. Démonter que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
6. Démonter que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

Correction

Exercice 1.

```
VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE
c EST_DU_TYPE NOMBRE
d EST_DU_TYPE NOMBRE
p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
AFFICHER "a?"
LIRE a
AFFICHER "b?"
LIRE b
AFFICHER "c?"
LIRE c
AFFICHER "d?"
LIRE d
p PREND_LA_VALEUR a*d-b*c
SI (p==0) ALORS
DEBUT_SI
AFFICHER "les vecteurs sont colinéaires"
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
AFFICHER "les vecteurs ne sont pas colinéaires"
FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

Exercice 2.

1. $\vec{AB}\begin{pmatrix} 4x+1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $\vec{DC}\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}$ colinéaires $\Leftrightarrow (4x+1)\times\left(\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)\times 3=0$

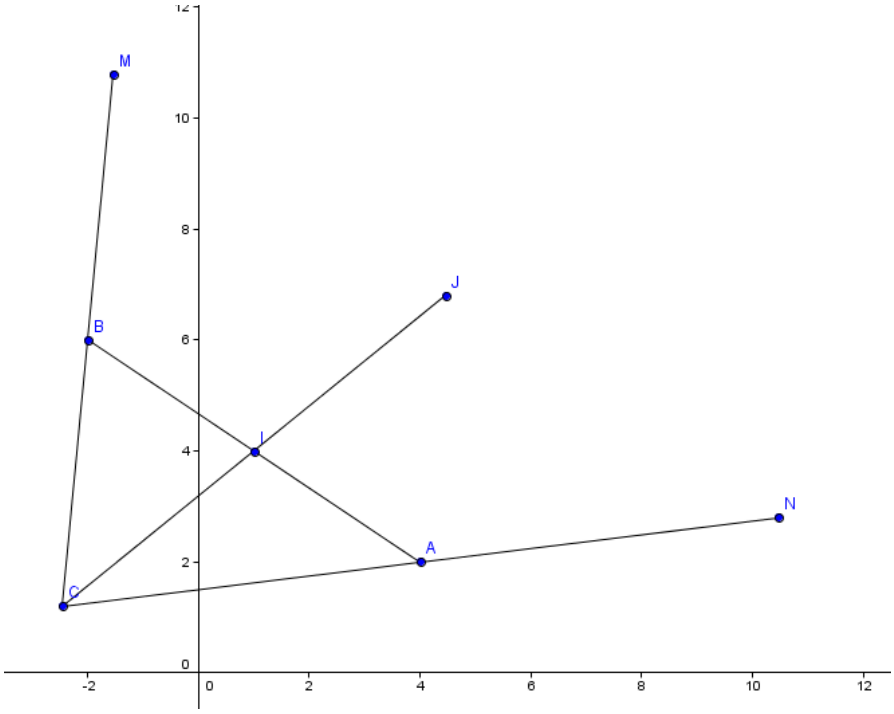
$$\Leftrightarrow 2x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{3}{4}$$

2. $ABCD$ est un parallélogramme lorsque les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ sont égaux.

Ceci est vrai lorsque $\begin{cases} 4x+1=3 \\ \frac{1}{4}=\frac{x}{2} \end{cases}$ soit $x=\frac{1}{2}$

Exercice 3.



1. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x_I-2-x_I=0 \\ 2-y_I+6-y_I=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=1 \\ y_I=4 \end{cases}$ donc $I(1;4)$

2. $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}46=x_M+2 \\ 4{,}8=y_M-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=-1{,}54 \\ y_M=10{,}8 \end{cases}$ donc $M(-1.54;10{,}8)$

$\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N+2{,}46=2\times 6{,}46 \\ y_N-1{,}2=2\times 0{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N=10{,}46 \\ y_N=2{,}8 \end{cases}$ donc $N(10{,}46;2{,}8)$

3. $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J-1+-3{,}46=0 \\ y_J-4-2{,}8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J=4{,}46 \\ y_J=6{,}8 \end{cases}$ donc $J(4{,}46;6{,}8)$

4. On a $\overrightarrow{MJ}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 12 \\ -8 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MJ}$, ces deux vecteurs sont colinéaires donc les points *M*, *N* et *J* sont alignés.

5. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$$

6. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{GI}$ car $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$.

On a alors $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont colinéaires et les points *G*, *I* et *C* sont alignés.

Exercice 4.

Soit $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan et (d_1) la droite d'équation : $6x+2y+3=0$

1. Déterminer un vecteur directeur de (d_1)
2. Soit $A\left(-\frac{12}{5};2\right)$. Déterminer une équation de la droite (d'_1) parallèle à (d_1) et passant par *A*.
3. Soit $\overrightarrow{u}$ (3 ;1). Déterminer une équation de la droite (d_2) passant par *A* et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. On notera *D* le point d'intersection entre les droites (d_1) et (d_2). Déterminer les coordonnées de *D*.

4. Soit le point *C*(0;–1,5).

Déterminer une équation de la droite (d'_2) passant par *C* et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
On notera *B* le point d'intersection entre les droites (d'_1) et (d'_2). Déterminer les coordonnées de *B*.
5. Démonter que le quadrilatère *ABCD* est un parallélogramme.
6. Démonter que le quadrilatère *ABCD* est un rectangle.

1. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de (d_1), $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$.

2. Soit $M(x;y)$ un point de la droite (d'_1) parallèle à (d_1) et passant par *A*, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+\frac{12}{5}\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \left(x+\frac{12}{5}\right)\times 6-(y-2)\times(-2)=0$

$$\Leftrightarrow 3x+y+\frac{26}{5}=0$$

3. Soit $M(x;y)$ un point de la droite (d_2), $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+\frac{12}{5}\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ colinéaires $\Leftrightarrow \left(x+\frac{12}{5}\right)\times 1-(y-2)\times 3=0$

$$\Leftrightarrow x-3y+\frac{42}{5}=0$$

Les coordonnées de *D* vérifient : $\begin{cases}6x+2y=-3\\x-3y=-\frac{42}{5}\end{cases}$ soit $\begin{cases}x=-1{,}29\\y=2{,}37\end{cases}$ $\quad D(-1{,}29;2{,}37)$

4. Soit $M(x;y)$ un point de la droite (d'_2), $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x\\y+1{,}5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ colinéaires $\Leftrightarrow x-(y+1{,}5)\times 3=0$

$$\Leftrightarrow x-3y-4{,}5=0$$

Les coordonnées de B vérifient : $\begin{cases} 3x + y = -\dfrac{26}{5} \\ x - 3y = 4{,}5 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = -1{,}11 \\ y = -1{,}87 \end{cases}$ $B(-1{,}11;-1{,}87)$

6. $\vec{AB}\begin{pmatrix} 1{,}29 \\ -3{,}87 \end{pmatrix}$ et $\vec{DC}\begin{pmatrix} 1{,}29 \\ -3{,}87 \end{pmatrix}$.On a $\vec{AB} = \vec{DC}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Calculons $AB = \sqrt{1{,}29^2 + (-3{,}87)^2} = \sqrt{16{,}641}$; $AD = \sqrt{1{,}11^2 + 0{,}37^2} = \sqrt{1{,}369}$;
$BD = \sqrt{(-0{,}18)^2 + 4{,}24^2} = \sqrt{18{,}01}$

On a 18,01= 16,641+1,369 soit $BD^2 = AB^2 + AD^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en A.
$ABCD$ est un parallélogramme, le triangle ABD est rectangle en A et $AB \neq AD$ donc $ABCD$ est un rectangle.