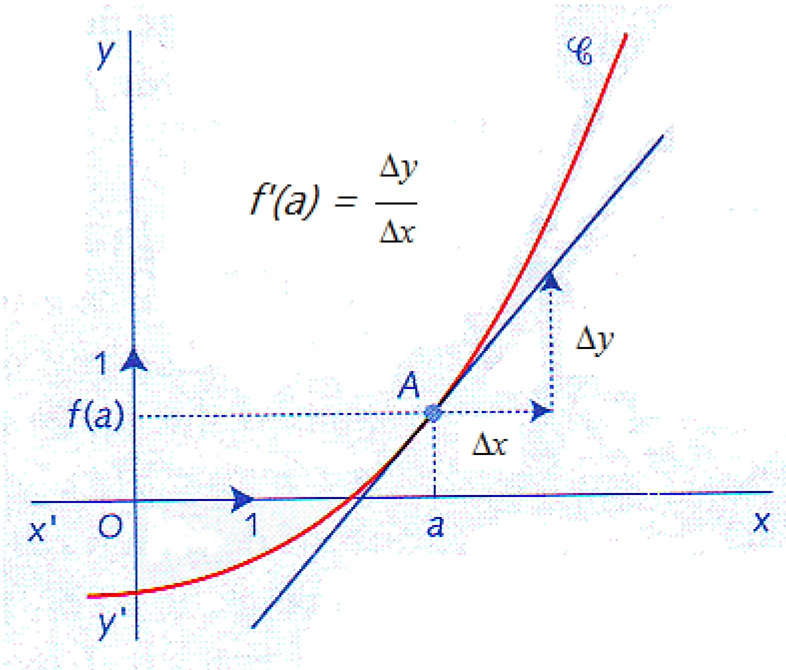
Nombre dérivé.

$f'(a)$, nombre dérivé de f en a, représente la pente (c'est à dire le coefficient directeur) de la droite tangente à la courbe représentative de f au point A (a ; $f(a)$).

Dans ce cas la tangente a pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.



Fonction dérivée.

On appelle fonction dérivée de f, la fonction notée f' qui, à tout x, associe $f'(x)$ s'il existe.

Dérivées usuelles: (k est un réel , α est un réel, n un entier naturel non nul)

$f(x)$	k	x^n	x^α	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	$n\,x^{n-1}$	$\alpha\,x^{\alpha-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Intervalle de validité	] - ∞; + ∞ [	] - ∞; + ∞ [	] 0 ; +∞ [	] - ∞; 0 [ou] 0 ; +∞ [	] 0 ; +∞ [

$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\ln x$	$\exp x$
$f'(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{x}$	$\exp x$
Intervalle de validité	] - ∞; + ∞ [	] - ∞; + ∞ [	] 0 ; +∞ [	] - ∞; + ∞ [

Opérations sur les dérivées: (k est un réel, α est un réel, u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\boldsymbol{R}$)

$(u+v)' = u' + v'$	$(uv)' = u'v + uv'$	$(ku)' = ku'$
$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} u'$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$	$(\exp(u))' = u'\exp(u)$

Compléments :

$\sin'(ax+b) = a\cos(ax+b)$

$\cos'(ax+b) = -a\sin(ax+b)$

Dans le cas d'une fonction composée de la forme $f(u)$ dérivable sur un intervalle donné on a :

$\left(f(u)\right)' = f'(u) \times u'$

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si sa dérivée f' est elle-même dérivable sur I, la dérivée de f' est appelée dérivée seconde de f et se note f''

On peut rencontrer l'écriture $\frac{df}{dx}$ pour désigner la fonction dérivée f' de f.

Sens de variation et signe de la fonction dérivée.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

- Si $f' > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' < 0$ sur I alors f est strictement décroissante sur I.
- Si f' est la fonction nulle sur I alors f est constante sur I.

EX 1 Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes:

$f_1 : x \mapsto x^2 - 5x + 7$	$f_2 : x \mapsto \frac{2x+3}{x-4}$	$f_3 : x \mapsto 7\cos(3x+2)$	$f_4 : x \mapsto (3x^2+4x-5)^3$
$f_5 : x \mapsto x\ln x - x$	$f_6 : x \mapsto \frac{\ln x + 2}{\ln x - 3}$	$f_7 : x \mapsto \ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$	$f_8 : x \mapsto \ln(3x^2+2x+1)$
$f_9 : x \mapsto e^{3x-4}$	$f_{10} : x \mapsto (x+1)e^{(x+1)}$	$f_{11} : x \mapsto \frac{e^x+1}{e^x-1}$	$f_{12} : x \mapsto e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$
$f_{13} : x \mapsto (x+1)e^x$	$f_{14} : x \mapsto \frac{e^x}{x}$	$f_{15} : x \mapsto \frac{e^{x+1}}{e^{x-1}}$	$f_{16}(x) = (3x+1)^3 \ln x$

EX 2 . Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer D_f , f ’et établir le tableau de variation de la fonction sur son domaine de définition.

$f_1 : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$; $f_2 : x \mapsto (x^2 + 4x - 5)^3$; $f_3 : x \mapsto e^{x^2+5x-1}$;

$f_4 : x \mapsto \sqrt{2x-1}$; $f_5 : x \mapsto 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$; $f_6 : x \mapsto 4x - 2 - 3\ln(2x+1)$

$f_7 : x \mapsto e^{2x} + 2e^{-x}$

Extremum local d’une fonction.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point de I.
Si f' s’annulle en x_0 , en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local.
Si $f(x_0)$ est un extremum local, alors $f'(x_0) = 0$

Lorsque $f(x_0)$ est un extremum local, la tangente à la courbe au point d’abscisse x_0 est parallèle à l’axe des abscisses.

EX 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ - { 1 } par: $f : x \mapsto \frac{x^2+x+1}{1-x}$.

Déterminer les extremums locaux de f.

Equation de la tangente en un point.

Soit C la courbe représentative d’une fonction f dérivable sur un intervalle I.
La tangente à C au point $M_0 (x_0 , f (x_0))$ a pour équation : $y = f'(x_0) (x - x_0) + f (x_0)$.
Si f est continue en x_0 et si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ alors la courbe représentative de f admet en $M_0 (x_0 , f (x_0))$ une tangente verticale d’équation $x = x_0$.

EX 4 Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction de l’exercice 3 en $x = 2$.

EX 5 Soit f la fonction définie sur $[\frac{1}{3} ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x-1}$.

Montrer que la courbe représentant f admet une tangente verticale au point d’abscisse $\frac{1}{3}$.

EX 6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ - { - 2 ; 5 } par $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-3x-10}$

a) Montrer qu’il existe des réels a, b, c tels que, pour tout x de $\mathbb{R}$ –{ –2 ; 5 } : $f(x) = a + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-5}$
b) Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son domaine de définition
c) Dresser le tableau de variation de f.
d) Donner une équation de la tangente T à la courbe C représentant f au point d’abscisse -1.
e) Tracer la droite T et la courbe C.

EX 7 Déterminer m pour que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{mx-3}{x+2}$ admette au point d'abscisse 1 une tangente de coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$.

EX 8 Soit la fonction f définie sur $\boldsymbol{R}^*$ par $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$, 0, $+\infty$
2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
3. Etablir le tableau de variation de f.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

EX 9 Soit la fonction f définie sur $\boldsymbol{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$, $+\infty$
2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
3. Etablir le tableau de variation de f.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

EX 10 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} - x + 2$ et $\boldsymbol{C}$ sa courbe représentative.

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 1 - \ln x - x^2$

1. Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g. En déduire le sens de variation de la fonction g pour tout x de $]0\,;+\infty[$
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$

Partie B

1. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$
3. Montrer que la droite $\boldsymbol{D}$ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à la courbe $\boldsymbol{C}$.
4. Etudier la position de la courbe $\boldsymbol{C}$ par rapport à la droite $\boldsymbol{D}$
5. Monter que pour tout x de $]0\,;+\infty[$ $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$
6. Dresser le tableau de variation de f
7. Déterminer les coordonnées du point A de la courbe $\boldsymbol{C}$ tel que la tangente en ce point soit parallèle à l'asymptote $\boldsymbol{D}$
8. Déterminer une équation de la tangente $\boldsymbol{T}$ à la courbe $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse e.
9. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle]0 ;1[. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.
10. Tracer $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{T}$