# EQUATIONS DIFFERENTIELLES

## 1. Equation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients réels constants sans second membre: $a\,y' + b\,y = 0$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions définies sur un intervalle où $a$ ne s'annule pas par :

$y(t) = \lambda\, e^{-\frac{b}{a}t}$ , $\lambda$ étant un réel

L'équation $a\,y' + b\,y = 0$ admet une solution et une seule $y_0$, définie sur un intervalle de $R$, vérifiant une condition initiale donnée.

**EX 1**. Résoudre le système: $\begin{cases} y'=2y \\ y(0)=4 \end{cases}$

**EX 2.** Déterminer la solution de l'équation différentielle $3\,x(t) + 5\,x'(t) = 0$ qui vérifie $x(1) = 2$.

**EX 3**.Soit $m$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $m : t \mapsto m(t)$
où $m(t)$ est la masse de sel, en grammes, que contient une "solution salée" (eau + sel) à l'instant $t$, $t$ en minutes.
Nous admettons que la fonction $m$ vérifie :
$m(0) = 300$ et $m$ est une solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $5y' + y = 0$.
**1.a.** Résoudre l'équation différentielle (E) ($y$ fonction de $t$).

**1.b.** Montrer que pour tout $t$ de $[0\,;+\infty[$ on a : $m(t) = 300e^{-\frac{t}{5}}$.

**2.** Déterminer le réel $t_0$ tel que $m(t_0) = 150$.

**3.** Nous admettrons qu'il est impossible de détecter la présence de sel à l'instant $t$ si, et seulement si, $m(t) \le 10^{-2}$. A partir de quel instant est-il impossible de détecter la présence de sel ?

## 2. Equation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients réels constants avec second membre: $a\,y' + b\,y = c(t)$.

Si on connaît une solution particulière $y_0$ de cette équation, les solutions de cette équation sont les fonctions définies sur un intervalle où $a$ ne s'annule pas par :

$y(t) = y_0(t) + \lambda\, e^{-\frac{b}{a}t}$ , $\lambda$ étant un réel.

**EX 4.** Résoudre l'équation différentielle : $2\,x' + x = 6$ et déterminer la solution $f_0$ telle que $f_0(0) = 7$.

**EX 5.** Résoudre l'équation différentielle $y' + 2\,y = \sin 2x$
( On cherchera une solution particulière de la forme : $x \mapsto A\cos 2x + B\sin 2x$ ).

**EX 6.** Résoudre l'équation différentielle $y' + 2\,y = 7x + 7$

**EX 7.** Montrer que la fonction $g$ définie sur $\boldsymbol{R}$ par $g(x) = xe^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle E : $y' + y = e^{-x}$. En déduire les solution de E vérifiant $f(1) = 0$

# EQUATIONS DIFFERENTIELLES

## Problème 1.

**Partie A - Résolution d'une équation différentielle.**

**1.** Donner la solution générale de l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 0$.

**2.** Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E) dont la dérivée prend la valeur $-2$ en 0.

**Partie B - Etude d'une fonction et de sa représentation graphique.** Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle I = [0 ; +∞ [ par $f(x) = 4e^{-\frac{1}{2}x}$. On désigne par Γ sa courbe représentative dans un plan rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

**1.a.** Déterminer $f(0)$ et la limite de $f$ en +∞.

**1.b.** Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.

**1.c.** Déterminer une équation de la tangente T à Γ en son point d'abscisse 0.

**2.** Soit $d$ la fonction définie sur l'intervalle I = [0 ; +∞[ par $d(x) = f(x) - (-2x + 4)$.

**2.a.** Démontrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle I : $d'(x) \geq 0$.

**2.b.** En déduire le signe de $d(x)$ puis la position relative de T et de Γ.

**2.c.** Tracer T et Γ. (On prend 2 centimètres pour unité de longueur.)

**3.** Pour tout nombre réel positif α, on désigne par A(α) l'aire en centimètres carrés de l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient $0 \leq x \leq \alpha$ et $0 \leq y \leq f(x)$. Exprimer A(α) en fonction de α et déterminer la limite L de A(α) lorsque α tend vers +∞.

**Partie C - Etude d'une suite.** Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $u_n = f(n) = 4e^{-\frac{1}{2}n}$

**1.** Démontrer que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme $u_0$ et la raison.

**2.** Soit $n$ un nombre entier naturel. On pose : $S_n = 4(u_0 + u_1 + ... + u_n)$ et $T_n = 4(u_1 + u_2 + ... + u_{n+1})$. Exprimer $S_n$ et $T_n$ en fonction de $n$.

**3.a.** Déterminer les limites respectives S et T de $S_n$ et $T_n$ lorsque $n$ tend vers +∞.

**3.b.** Vérifier que $T \leq L \leq S$ (L a été défini à la question 3. de la partie B).

## Problème.2 La cuisson du jambon

Une société produit des jambons industriels. Les jambons sont d'abord moulés, puis cuits à température constante par convection.

Chaque jambon est moulé à $T_0 = 10$°C avant d'être introduit dans un four maintenu à température constante de 75°C. La température $T(t)$ (en °C) au coeur du jambon vérifie à chaque instant t (t $\geq 0$ exprimé en heures) l'équation différentielle:

$$\text{(E)} : \frac{dT}{dt} + KT = 75K$$

$K$ étant une constante positive dépendant des conditions de cuisson.

1. Déterminer $T$ en fonction de $t$, c'est-à-dire la solution de (E) qui vaut 10 en t = 0.
2. Au bout de 9 heures, la température à coeur atteint 69°C. Déterminer la valeur de la constante $K$.
3. Étudier la fonction $t \mapsto T(t)$ sur l'intervalle [1 ; 15] et tracer la courbe représentative de cette fonction.

## Problème.3

On considère la transformation de l'iodure de tertiobutyle en hydroxyde de tertiobutyle et iodure d'hydrogène.
On note $c(t)$ la concentration molaire en hydroxyde de tertiobutyle obtenue dans la réaction à l'instant $t$.

On émet l'hypothèse que la vitesse de formation d'hydroxyde de tertiobutyle en fonction du temps vérifie l'équation différentielle:

$$(E)\quad \frac{dc}{dt} + 0{,}33\, c = 0{,}03432.$$

1. a. Donner la solution générale de cette équation sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   b. Préciser la solution particulière vérifiant $c(0) = 0$.
2. On note $x(t)$ le degré d'avancement de la réaction à l'instant t, c'est-à-dire le quotient de $c(t)$ par la concentration molaire initiale de l'iodure qui vaut ici 0,104 mol $L^{-1}$.
   a. Vérifier que : $x(t) = 1 - e^{-0{,}33\, t}$

On note (C) la courbe représentative de $x$ dans un repère orthogonal (unité graphique :1 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).
   b. Étudier le comportement de $x$ en $+\infty$, préciser l'asymptote (D) à la courbe (C).
   c. Déterminer le sens de variation de $x$ sur $[0\,;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
   d. Représenter (D) et (C).
3. Déterminer, par le calcul, le temps à partir duquel on peut prévoir que le degré d'avancement de la réaction sera supérieur ou égal à 0,98.