Etudes de fonctions

EX 1

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; +∞[par $f(x) = x \ln x - 2x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

1.a. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers +∞. On écrira $f(x)$ sous la forme $f(x) = x(\ln x - 2)$.

1.b. On désigne par f' la dérivée de f. Etudier le signe de $f'(x)$.

1.c. Dresser le tableau des variations de f dans l'intervalle [1 ; +∞ [. On précisera, dans ce tableau, la valeur $f(1)$ et la limite de $f(x)$ en+∞.

2.a. Résoudre, dans l'intervalle [1 ; +∞ [, l'équation $f(x) = 0$. Montrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un point B dont on précisera les coordonnées.

2.b. Soit A le point de la courbe d'abscisse 1. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A.

Construire la tangente (T) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3.a. Soit g la fonction définie sur [1 ; +∞ [par $g(x) = x \ln x$. Montrer que $G(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$ est une fonction primitive de g sur l'intervalle [1 ; +∞ [.

3.b. En déduire une primitive F de f sur l'intervalle [1 ; +∞ [.

3.c. Calculer en cm^2 l'aire de la surface délimitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=9$ et $x=10$

EX 2

I désigne l'intervalle $[1;4[$.

Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \ln x + \ln(4 - x)$

Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (unité : 3 cm).

1. Déterminer la limite de f en 4. Que peut-on en déduire pour la droite D d'équation $x = 4$?
2. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur I.
3. Tracer la courbe C et D dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
4. Résoudre sur l'intervalle I l'équation $f(x) = 0$ et en déduire l'abscisse du point d'intersection de C avec l'axe des abscisses : on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 0,01 près par défaut.
5. Soit F la fonction définie sur I par : $F(x) = (x - 4)\ln(4 - x) + x \ln x - 2x$

   Vérifier que F est une primitive de f sur I.

Etudes de fonctions

EX 3

1 . Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 20$

a. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Étudier la variation de f sur R et dresser son tableau de variation.

c. Calculer $I = \int_0^5 f(x)\, dx$

2. On considère la fonction g définie sur R par: $g(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 10$

Calculer $J = \int_0^5 g(x)\, dx$

3. Le plan est muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée). Tracer l'axe des abscisses sur la plus grande dimension de la feuille.
On note $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de f sur l'intervalle [0 ; 5], $\mathcal{C}_2$ l'image de $\mathcal{C}_1$ dans la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et P la courbe représentative de g sur l'intervalle [-5 ; 5].
Tracer $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, P

4. On souhaite réaliser un logo pour une association. Le logo est la région du plan limitée par $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et l'axe des abscisses.
La partie située entre P et l'axe des abscisses est blanche, le reste du logo est bleu.
Calculer en cm^2 l'aire du logo, puis l'aire de la partie blanche, puis enfin l'aire de la partie bleue.

EX 4

Soit la fonction f définie sur R par $x \mapsto (2x^2 - 5x + 2)e^x$
On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques :
- 2 cm sur l'axe (Ox) des abscisses,
- 1 cm sur l'axe (Oy) des ordonnées.

1.a. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

1.b. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ (on admettra que pour tout entier $n > 0$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$).

En déduire une équation d'une asymptote de la courbe (C).

2.a. Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie pour tout réel x par :

$f'(x) = (2x^2 - x - 3)e^x$.

2.b. Etablir le tableau de variation de f.

3. Calculer les coordonnées des points N, M et P suivants :
   - N est le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.
   - M et P sont les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses (l'abscisse de M étant inférieure à l'abscisse de P).

4. Tracer la courbe (C) dans le plan rapporté au repère défini ci-dessus.

5.a. Résoudre graphiquement l'inéquation d'inconnue x : $f(x) \geq 0$.

5.b. Selon les valeurs du réel k, indiquer par une lecture graphique, quel semble être le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x : $f(x) = k$.

6. Soit F une fonction définie sur R par $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$. Calculer les réels a, b, c, pour lesquels F est une primitive de f.