Généralités sur les fonctions.

Rappels : Fonction. Courbe représentative.

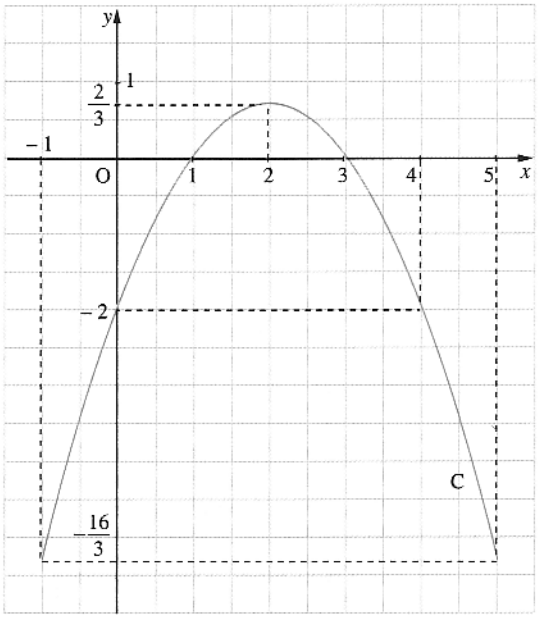
Une fonction de la variable réelle x est déterminée par la donnée d'une partie D de $\mathbb{R}$ (appelé ensemble de définition de f) et d'un procédé qui permet d'associer à chaque x de D un nombre réel et un seul.

$$f : \; D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative d'une fonction f définie sur D est l'ensemble des points M (x ; $f(x)$), où x décrit D.
Pour chaque x de D, il existe un unique point d'abscisse x sur la courbe.

Ex 1

Le plan est muni du repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) . Soit f la fonction définie sur l'intervalle [–1, 5], dont on donne le courbe C :



1. Utiliser ce graphique pour déterminer les valeurs de $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$.

2. Dans quel intervalle varie $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle [–1, 5],?

3. Résoudre graphiquement dans l'intervalle [–1, 5] les équations suivantes

A) $f(x) = 0$ B) $f(x) = -2$ C) $f(x) = 1$ D) $f(x) = \frac{2}{3}$

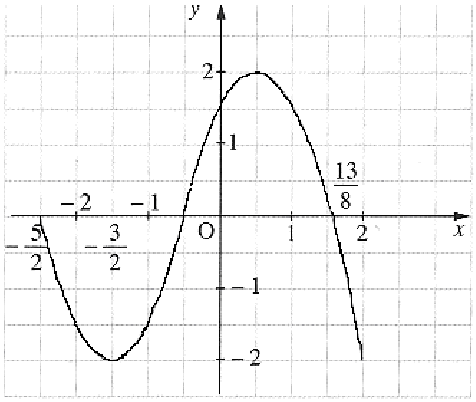
4 a) Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de x comprises entre – 1 et 5, le nombre $f(x)$ est positif.
b) En déduire, dans un tableau, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle [–1, 5]

5. Donner le tableau de variation de f sur l'intervalle [–1, 5].
Pour quelle valeur de x la fonction f admet-elle un maximum?

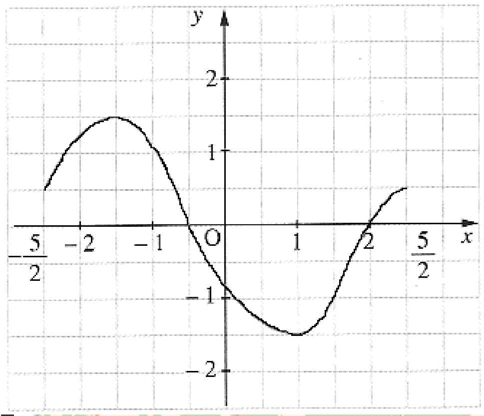
Ex 2

Le plan est muni du repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) . Soit *f* et *g* les fonctions dont les courbes sont données ci-dessous :

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-\frac{5}{2}, 2]$



g est la fonction définie sur l'intervalle $[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$

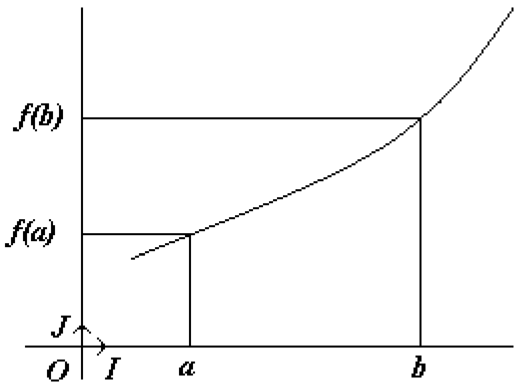


Pour chacune de ces deux fonctions :

- Dresser le tableau de variation de la fonction
- Indiquer les extrema éventuels
- Résoudre $f(x) = 0$
- Donner dans un tableau le signe de *f* (*x*) suivant les valeurs de *x*.

Rappels : Variation d'une fonction

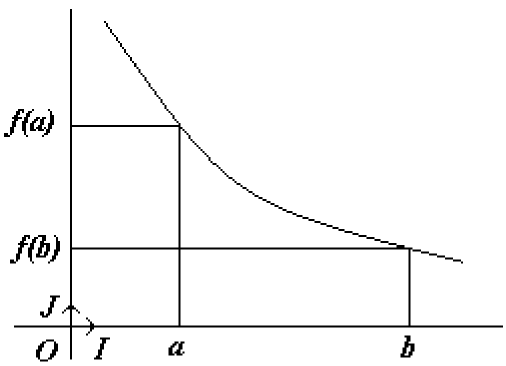
Un fonction *f* définie sur un intervalle I est croissante sur I si pour tous réels *a* et *b* de I tels que *a* < *b* on a $f(a) \leq f(b)$



fonction strictement croissante

$a < b$ et $f(a) < f(b)$

Un fonction *f* définie sur un intervalle I est décroissante sur I si pour tous réels *a* et *b* de I tels que *a* < *b* on a $f(a) \geq f(b)$



fonction strictement décroissante

$a < b$ et $f(a) > f(b)$

Généralités sur les fonctions.

Rappels : Fonctions de référence

Fonction affine

Soit f la fonction définie par $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$x \mapsto ax + b$ où a et b sont des réels, avec a non nul.
f est une fonction affine
(dans le cas particulier où $b = 0$, f est une fonction linéaire de la forme $f(x) = ax$)

La représentation d'une fonction affine est une droite.
Attention: une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'est pas la représentation d'une fonction affine.

Variations :
Si $a > 0$, f est croissante
Si $a < 0$, f est décroissante.

Fonction polynôme de degré 2

Soit f la fonction définie par $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$x \mapsto ax^2 + bx + c$

f est une fonction polynôme de degré 2

Tableau de variation

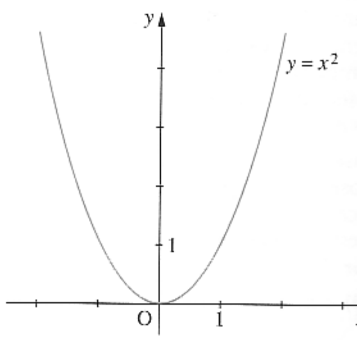
Lorsque $a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$f(-\dfrac{b}{2a})$	↗	

Lorsque $a < 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$f(-\dfrac{b}{2a})$	↘	

Courbe représentative de la fonction carrée



La courbe est appelée parabole

La parabole est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$

Fonction inverse

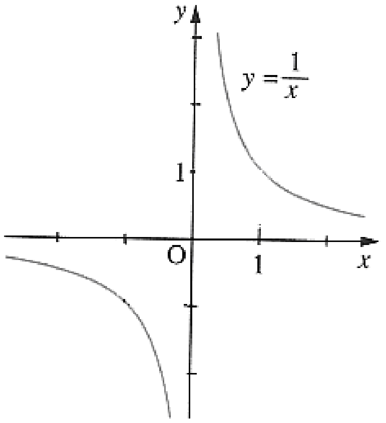
C'est la fonction f définie par
$$f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Tableau de variation

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$	↘ ‖ ↘

La courbe est appelée hyperbole

Courbe représentative



La courbe de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère.

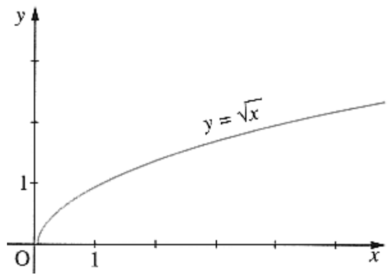
Fonction racine carrée

C'est la fonction f définie par
$$f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

Tableau de variation

x	0 $+\infty$
$f(x)$	0 ↗

Courbe représentative



On constate que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

Fonction sinus

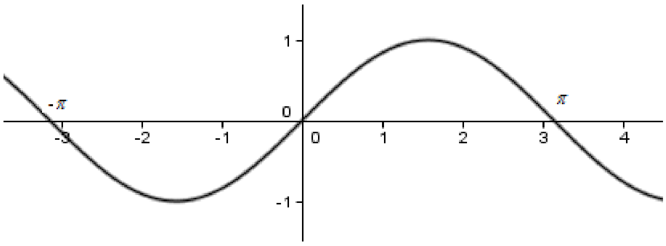
C'est la fonction f définie par $f: \boldsymbol{R} \to [-1\,;1]$, $x \mapsto \sin x$

La fonction sinus est périodique de période 2π

Tableau de variation

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$+\pi$
$f(x)$	0	↘	–1	↗	1	↘	0

Courbe représentative



Fonction cosinus

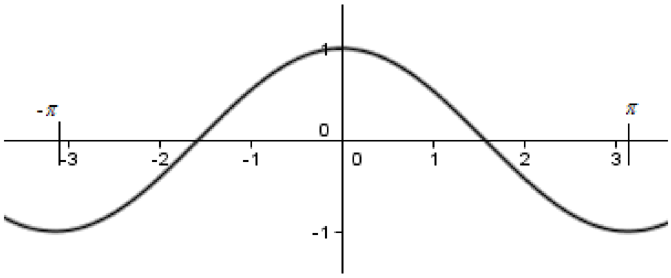
C'est la fonction f définie par $f: \boldsymbol{R} \to [-1\,;1]$, $x \mapsto \cos x$

La fonction sinus est périodique de période 2π

Tableau de variation

x	$-\pi$		0		$+\pi$
$f(x)$	–1	↗	1	↘	–1

Courbe représentative



Fonction logarithme népérien

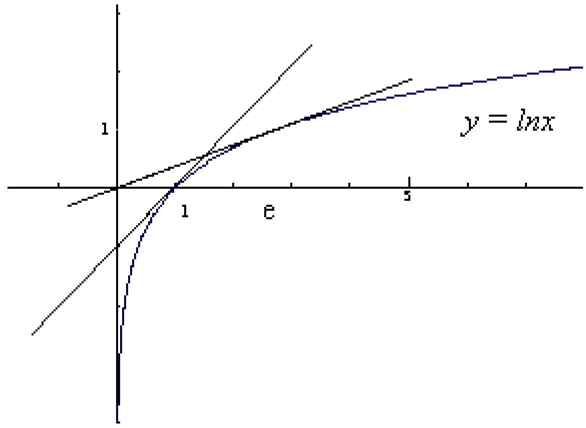
La fonction logarithme népérien, notée ln, est définie par : $\ln : \ ]0\,;+\infty[\ \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \ln x$

La courbe représentative de la fonction présente une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Variations : La fonction est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Valeurs particulières : $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$ (avec e = 2,71828...)

Courbe représentative:



Propriétés: a et b étant des réels strictement positifs, α un réel et n un entier naturel.

$\ln ab = \ln a + \ln b$	$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$	$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$	$\ln a^{\alpha} = \alpha \ln a$	$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\ln a$

Equation ln x = m.
La fonction ln étant strictement croissante de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, pour chaque nombre réel m, l'équation $\ln x = m$ admet une solution unique dans $]0\,;+\infty[$. On note e^{m} la solution de l'équation $\ln x = m$.

Ex 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

A) $\ln x = 1$ B) $\ln x = -5$ C) $\ln x = 0$ D) $\ln^2 x + 5\ln x + 6 = 0$

Equation ln a = ln b avec a > 0 et b > 0.
La fonction ln étant strictement croissante de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, l'équation $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$.
Inéquation ln a < ln b avec a > 0 et b > 0.
La fonction ln étant strictement croissante de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, l'équation $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$.
(idem avec > ; ≤ ; ≥)

Ex 4

Résoudre dans $\boldsymbol{R}$ les équations et inéquations suivantes :

A) $\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln 4$

B) $\ln(-2x^2+8)+\ln(-x+3)=\ln 2+\ln(x^3+x)$

C) $\ln 3-\ln(2x-1)=\ln x$

D) $\ln(x+2)-\ln(-x+5)=\ln(x+3)$

E) $\ln(x^2+3x-4)-\ln 3=\ln 2$

F) $2\ln(x+4)\geq \ln(2-x)$

G) $\ln 2x(x-1)\leq \ln(3-x)$

Ex 5

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation $x^2-4x-5=0$

2. En déduire la résolution, dans l'ensemble des nombres réels, des équations suivantes :

2.a. $(\ln x)^2-4\ln x-5=0.$

2.b. $\ln(x-3)+\ln(x-1)=3\ln 2.$

Ex 6

Soit P le polynôme tel que $P(x)=x^3-3x^2-4x+12.$

1. Montrer que 3 est une racine de P.

Déterminer a, b, c tels que pour tout réel x, on ait $P(x)=(x-3)(ax^2+bx+c).$

Résoudre l'équation $P(x)=0.$

2. En déduire la résolution des équations :

$(\ln x)^3-3(\ln x)^2-4\ln x+12=0.$

Fonction logarithme décimal

La fonction logarithme décimal est la fonction, notée log, définie sur] 0 ; +∞ [par :

log : $x\mapsto \log x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$

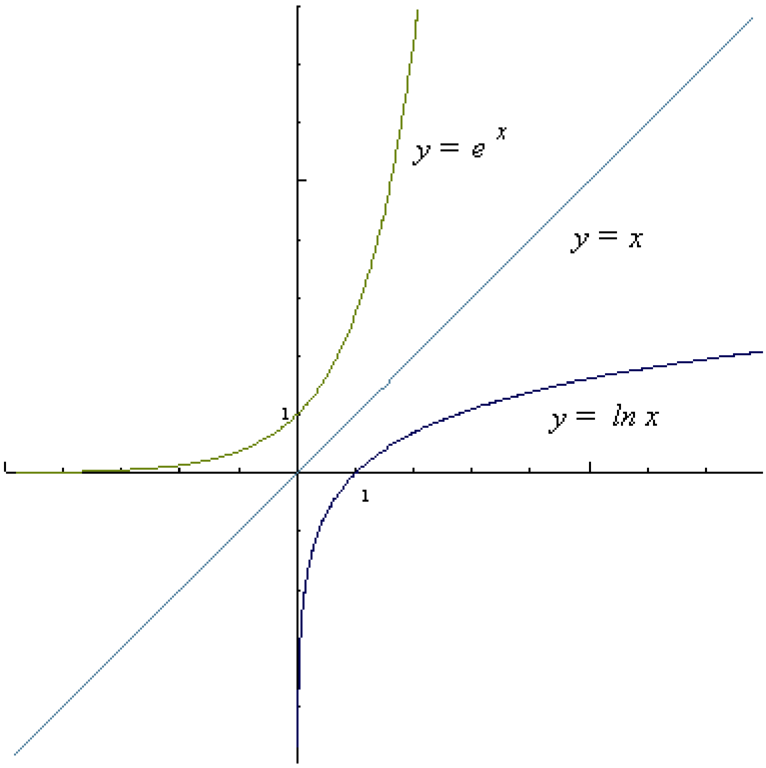
Ex 7

La concentration en ions H_3O^+ d’une solution aqueuse est $1{,}75\times 10^{-12}$ mol.l^{-1} .
Sachant que pH = - log [H_3O^+] calculer le pH de cette solution.
Quelle est la concentration en ions H_3O^+ d’une solution de pH = 6 ?

Fonction exponentielle.

La fonction ln: $x \mapsto \ln x$ est une fonction strictement croissante sur $]\,0; +\infty[$, elle admet donc une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]\,0; +\infty[$.
La fonction réciproque de la fonction logarithme népérien est la fonction exponentielle : exp $: x \mapsto e^x$.

La courbe représentative de la fonction exponentielle est la symétrique de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Propriétés.

- Pour tout réel x , $e^x > 0$
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$ et pour tout réel x , $\ln e^x = x$
- Pour tout réel $x > 0$ et pour tout réel y , : $y = \ln x$ si et seulement si $x = e^y$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ d'où:
$e^x = e^y$ si et seulement si $x = y$ et $e^x > e^y$ si et seulement si $x > y$

Pour tous réels a et b et pour tout entier n:

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \; ; \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \; ; \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \; ; \qquad (e^a)^n = e^{na} \; ; \qquad e^0 = 1 \; ; \qquad e^1 = e$$

Ex 8

Soit x un nombre réel, écrire sous la forme e^a les nombres suivants :

$$\frac{1}{e^{3x}} \; ; \qquad (e^{-2x})^3 \; ; \qquad e^x \times e^{-2x} \; ; \qquad 1 \; ; \qquad \frac{e^x - 1}{e^2}$$

Ex 9

Résoudre dans ***R*** les équations et inéquations suivantes.

A) $e^{5x+1} = e^{3x+2}$ B) $e^{3x} = 8e^{x}$ C) $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$

D) $\dfrac{2e^{x} - 1}{e^{x} + 4} = 0$ E) $e^{x} - e^{-x} = 2$ F) $e^{3x} - 2e^{2x} - e^{x} + 2 = 0$

G) $e^{x+2} \leq e^{-2x+4}$ H) $e^{2x} - 5e^{x} \geq 0$

Fonctions exponentielles de base *a*, de la forme $\boldsymbol{a}^{x}$

Soit a un réel strictement positif, différent de 1.

La fonction définie sur ***R*** par $x \mapsto a^{x}$ est appelée fonction exponentielle de base *a*.

Pour tout réel *x*, on pose $a^{x} = e^{x \ln a}$

Ex 10

Tracer la courbe représentative de chacune des fonction suivantes

$f_1 : x \mapsto 2^{x}$; $f_2 : x \mapsto 0{,}5^{x}$; $f_3 : x \mapsto 0{,}9^{x}$

Ex 11

Résoudre dans ***R*** les équations et inéquations suivantes.

$3^{x} = 2$ $0{,}7^{x} < 0{,}49$ $3^{x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{4}$ $3^{2x+1} = 5$ $3^{-x} > 1089$

Ex 12

Deux villes A et B ont, au premier janvier 1990, des populations respectives de 3 millions et 1,5 million d'habitants.
La population de A s'accroît de 2 % par an, tandis que celle de B augmente de 10 % par an.
On note *f*(*n*) et *g*(*n*) les populations respectives de A et de B, exprimées en millions d'habitants, au premier janvier de l'année 1990 + *n* (*n* entier naturel).

1.a. Préciser *f* (0). Exprimer *f* (*n* + 1) en fonction de *f* (*n*).
b. Quelle est la nature de la suite (*f* (*n*)) ? En déduire *f* (*n*) en fonction de *n*.
2. Faire le même travail avec *g*.
3. En admettant que les deux populations croissent très régulièrement, on prolonge les suites (*f* (*n*)) et (*g*(*n*)) à $\boldsymbol{R}^{+}$, définissant deux fonctions exponentielles qu'on notera *f* et *g*.
Représenter ces deux fonctions sur un même graphique
(unité en abscisses :1 cm pour une année, en ordonnées: 2 cm pour un million d'habitants).
4. Résoudre l'équation *f*(*x*) = *g*(*x*) (on pourra utiliser la fonction ln).
À partir de quelle année la population de B dépassera-t-elle celle de A ? En quel mois précis?
5. À quelle date (à un mois près), la population de B dépassera-t-elle le double de celle de A?

Fonction puissance

On appelle fonction puissance f_α toute fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f_\alpha(x) = x^\alpha$ avec α réel

On a : $\boxed{x^\alpha = e^{\alpha \ln x}}$

Cas particuliers.

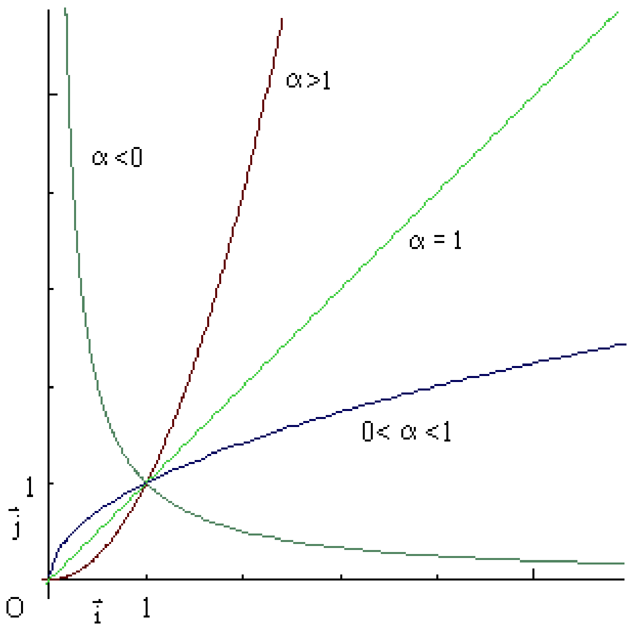
Lorsque α est un entier positif, on obtient une fonction polynôme dont le domaine est ***R***

Lorsque α est un entier négatif, on obtient une fonction rationnelle dont le domaine est $\boldsymbol{R}^*$

Sens de variation.

- lorsque $\alpha > 0$, f_α est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$
- lorsque $\alpha < 0$, f_α est strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Représentation graphique.



Propriétés.

Pour tous réels *a* et *b* et pour tout entier *n*:

$x^{a+b} = x^a \times x^b$; $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$; $x^{a-b} = \dfrac{x^a}{x^b}$; $(x^a)^n = x^{na}$; $x^0 = 1$; $x^1 = x$