Analyse . Limites de fonctions.

Limite d'une fonction

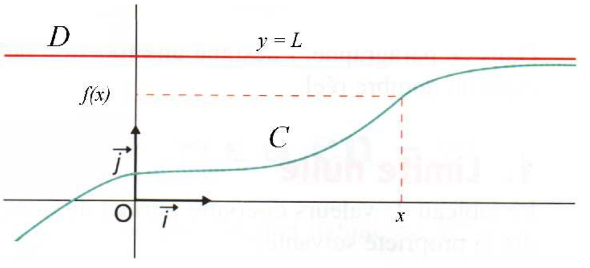
1. Limite finie en l'infini.

Soit f une fonction définie dans un intervalle $]\, a \,; +\infty[$, a étant un réel.
Soit L un réel, la fonction f tend vers L quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si $|f(x) - \mathrm{L}|$ tend vers 0 (c'est-à-dire la distance entre $f(x)$ et L tend vers 0) **pour x assez grand.**
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = \mathrm{L}$.

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $]\, 0 \,; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{x}$. Que constate-t-on lorsque x devient grand?
Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Soit f une fonction définie dans un intervalle $]\, -\infty \,; a\, [$, a étant un réel.
Soit L un réel, la fonction f tend vers L quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si $|f(x) - \mathrm{L}|$ tend vers 0 (c'est-à-dire la distance entre $f(x)$ et L tend vers 0) **pour x assez grand négatif.**
On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{L}$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = \mathrm{L}$.

Asymptote horizontale. Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$, la courbe représentative de la fonction f admet pour asymptote la droite d'équation $y = \mathrm{L}$ en $+\infty$. (énoncé analogue en $-\infty$)



Exemple :
Soit la fonction f définie sur $]\, 0 \,; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{x} + 2$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe de f.

2. Limite infinie d'une fonction en a (a réel).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I tel que I =] a ; b] ou I = [b ; a [

La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si et seulement si $f(x)$ devient de plus en plus grand **lorsque x se rapproche de a**.

On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = +\infty$

La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a si et seulement si $f(x)$ devient de plus en plus grand négatif **lorsque x se rapproche de a**.

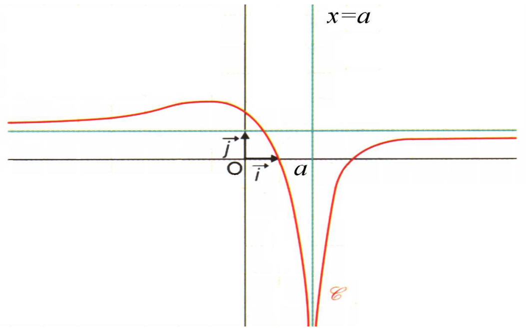
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = -\infty$.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur] 0 ; $+\infty$[par $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Que constate-t-on lorsque x est proche de 0 ?

A partir de quelle valeur de x a-t-on $f(x)\geq 1000$? Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Asymptote verticale. Lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, la courbe représentative de la fonction f admet pour asymptote la droite d'équation $x = a$. (idem lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$)



Technique : on décompose en $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ après avoir étudié le signe du dénominateur.

Exemple: Calculer $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x-1}{x^2-1}$ puis $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-1}{x^2-1}$ et en déduire l'existence d'asymptotes à la courbe de f.

3. Limite infinie en l'infini.

Soit *f* une fonction définie dans un intervalle $]\ a\ ;+\infty[$, a étant un réel.

La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si $f(x)$ devient de plus en plus grand **pour *x* assez grand.**
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Exemple :

Soit la fonction *f* définie sur $]\ 0\ ;+\infty[$ par $f(x)= x^2+2$. Que constate-t-on lorsque x devient grand?
A partir de quelle valeur de x a-t-on $f(x)\geq 1000$? Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si pour $f(x)$ devient de plus en plus grand négatif **pour *x* assez grand.**
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

Soit *f* une fonction définie dans un intervalle $]-\infty\ ;\ a\ [$, a étant un réel.

La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si $f(x)$ devient de plus en plus grand **pour *x* assez grand négatif.**
On note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement $f(x)$ devient de plus en plus grand négatif **pour *x* assez grand négatif.**
On note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

3. Limites de référence

Soit n un entier naturel **non nul**

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
Lorsque n est pair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$	lorsque n est impair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
Lorsque n est pair : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$	lorsque n est impair : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$
Lorsque *f* est une fonction polynôme, rationnelle, sinus, cosinus ou racine carrée définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I, on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$	

4. Opérations sur les limites.

Les résultats concernant la limite d'une somme, la limite d'un produit ou la limite d'un quotient de fonctions lorsque x tend vers un réel a sont intuitivement évidents. De même que « l'inverse d'un infiniment grand est un infiniment petit » et « l'inverse d'un infiniment petit est un infiniment grand ».

Il existe cependant quatre cas de formes indéterminées qui nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront: $\infty-\infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$

Limite d'une fonction polynôme ou rationnelle en l'infini.

La technique consiste à mettre en facteur le terme de plus haut degré.

Limite d'une fonction composée.

Lorsque $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{u\to b} f(u) = c$ on a $\lim\limits_{x\to a} f(u(x)) = c$

Limites à connaître: (n entier naturel non nul) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$

EX 1 Déterminer les limites, aux bornes de leurs domaines de définition, des fonctions suivantes:

$f_1 : x \mapsto \frac{3x^2+2x-3}{x-1}$ $f_2 : x \mapsto \frac{2x^2+4x-6}{4x^2+14x+6}$

EX 2 Déterminer les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(3x+5)$ b) $\lim\limits_{x\to-\frac{5}{3}} \ln(3x+5)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 2$ f) $\lim\limits_{x\to 0} e^x - 2$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 2$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5}{e^x}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x}$ j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^3}$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2}{x}$ l) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x+1}$ n) $\lim\limits_{x\to 0} e^{-2x+1}$ o) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x+1}$ p) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$

q) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2-2x+1}$ r) $\lim\limits_{x\to 0} e^{x^2-2x+1}$ s) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \ln x^5$; t) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x$

Analyse . Limites de fonctions.

EX 3 Trouver les réels a et b compte tenu des renseignements donnés sur la fonction f :

1. $f : x \mapsto a\,\dfrac{x+1}{x+2} + b\,\dfrac{x^2-x-1}{x^2-1}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $f(0) = -1$
2. $f : x \mapsto \dfrac{ax^2+bx+3}{2x+1} - x$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

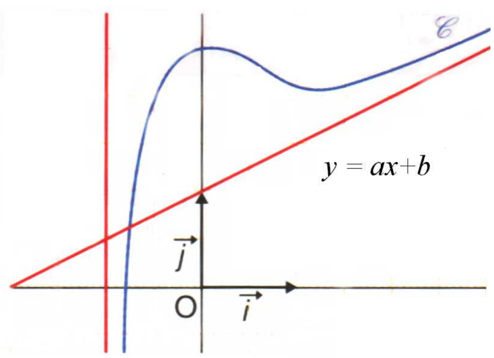
Asymptote oblique.

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - g(x) = 0$, les courbes d'équations $y = f(x)$ et $y = g(x)$ sont des courbes asymptotes.

En particulier Si $g(x) = ax + b$, la droite d'équations $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f.

Dans ce cas: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$

Le signe de $f(x) - (ax + b)$ détermine alors la position de la courbe par rapport à l'asymptote.



EX 4 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x-3}$ sur $D =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x de D, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-3}$.
2. En déduire que la droite D, d'équation $y = 2x + 6$, est asymptote à la courbe C en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Étudier la position relative de la courbe C et de la droite D.
4. La courbe représentative de f admet-elle une autre asymptote? Si oui, en donner une équation.

EX 5 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-x^2+2}{x+1}$ sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$.

1. Montrer que la droite D, d'équation $y = -x + 1$, est asymptote à la courbe C en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier la position relative de la courbe C et de la droite D.
3. La courbe représentative de f admet-elle une autre asymptote? Si oui, en donner une équation.