Primitives et Intégrales

Primitives d'une fonction sur un intervalle.

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. Dire que F est une primitive de f sur I signifie que F est dérivable sur I et que, pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.

Toute fonction définie et continue sur un intervalle I admet sur cet intervalle une infinité de primitives qui diffèrent d'une constante.

Si F et G sont des primitives, sur un intervalle I des fonctions f et g et si α et β sont deux réels, alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$.

Si une fonction f admet une primitive sur un intervalle I, il existe une primitive et une seule de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné de I.

Primitives usuelles. (k est un réel , α est un réel $\alpha \neq -1$, n un entier naturel non nul)

$f(x)$	k	x^n	x^α	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x}$	$\exp(x)$
$F(x)$	k x + c	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ + c	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ + c	$-\frac{1}{x}$ + c	$\sqrt{x}$ + c	$\ln x$ + c	$\exp(x)$+c
Intervalle de validité	***R***	***R***	] 0 ; +∞ [	] - ∞; 0 [ou] 0 ; +∞ [	] 0 ; +∞ [	] 0 ; +∞ [	***R***

$f(x)$	$u'u^\alpha$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$	$u'e^u$
$F(x)$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ + c	$\frac{1}{u}$ + c	$\sqrt{u}$ + c	$\ln u$	e^u

EX 1. Déterminer la primitive de f, notée F, vérifiant $F(x_0) = a$ dans les cas suivants:

$f_1 : x \mapsto 4x^3 - 7x$ avec $x_0 = 3$ et a = 2 ;

$f_2 : x \mapsto \frac{3}{x^2}$ avec $x_0 = 1$ et a = 0;

$f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$ avec $x_0 = 2$ et a = 1

EX 2. Déterminer une primitive de f

$f_1 : x \mapsto 4x^3 + 5x^2 + 7x - 6$ $\quad f_2 : x \mapsto (x+1)(x-1)$ $\quad f_3 : x \mapsto \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}$

$f_4 : x \mapsto \frac{3}{2\sqrt{x+1}}$ $\quad f_5 : x \mapsto (4x+5)^3$ $\quad f_6 : x \mapsto \frac{-3}{(3x+1)^2}$

$f_7 : x \mapsto \frac{1}{(2x-3)^3}$ $\quad f_8 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$ $\quad f_9 : x \mapsto \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$f_{10} : x \mapsto \frac{2x^3 + x^2 - 1}{2x^2}$ $\quad f_{11} : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ $\quad f_{12} : x \mapsto \frac{x^3-1}{x^2}$

$f_{13} : x \mapsto \frac{1}{4x^2+4x+1}$ $\quad f_{14} : x \mapsto \frac{x}{x^2+4}$ $\quad f_{15} : x \mapsto \frac{4x+2}{x^2+x}$

$f_{16} : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ $\quad f_{17} : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ $\quad f_{18} : x \mapsto 2e^x + \frac{3}{x}$

$f_{19} : x \mapsto 7e^{3x+1}$ $\quad f_{20} : x \mapsto e^{2x+3}$

Intégrale d'une fonction sur un intervalle

Soit a et b deux réels d'un intervalle I et f une fonction continue sur I.
L'intégrale de a à b de la fonction f, notée $\int_a^b f(x)dx$, est le réel F (b) - F (a) , où F est une primitive de f sur I.

On note $\int_a^b f(x)dx = [\ F(x)\ ]_a^b = F(b) - F(a)$.

On a aussi : si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, alors $g'(x) = f(x)$; $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$

Etant donné un point a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur 0 au point a.

EX 3 Calculer les intégrales suivantes :

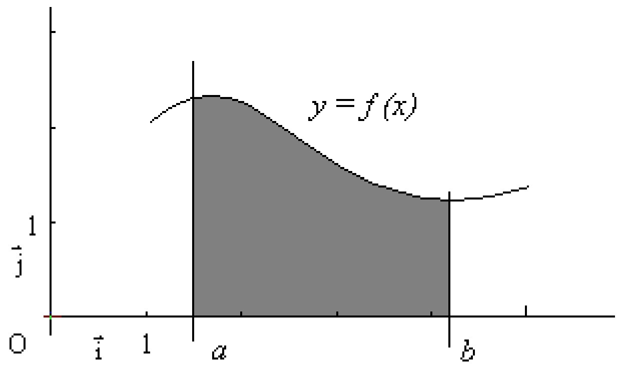
$\int_{-2}^{1} (x^2+2)\,\mathrm{d}x$ $\quad \int_{-1}^{0} \frac{3}{(3x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ $\quad \int_1^2 \frac{3}{3x-1}\,\mathrm{d}x$ $\quad \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{5x+1}}\,dx$ $\quad \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ $\quad \int_0^1 (5x+2)^3\,\mathrm{d}x$

EX 4 On considère la fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{x-2}{(2x-3)^2}$. Montrer qu'il existe deux réels A et B tels que, pour tout réel différent de $\frac{3}{2}$: $f(x) = \frac{A}{(2x-3)^2} + \frac{B}{2x-3}$, puis calculer : $\mathrm{I} = \int_e^{e^2} \frac{x-2}{(2x-3)^2}\,\mathrm{d}x$.

Interprétation géométrique.

Lorsque f est une fonction continue et positive sur un intervalle I, a et b étant deux réels de I tels que $a \le b$, l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est: $\int_a^b f(x)dx$.

(Attention: le résultat est donné en unités d'aire)



EX 5 On considère la fonction f : $x \mapsto x^2$

Déterminer l'aire du domaine limité par la courbe de cette fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Propriétés.

$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$; $\int_a^a f(x)dx = 0$;

Formule de Chasles : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

EX 6 Calculer $\int_{-1}^2 x\sqrt{2}dx + \int_2^5 x\sqrt{2}dx + \int_5^8 x\sqrt{2}dx$

EX 7 Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = ax^2 + b$ où a et b sont deux réels.

Déterminer a et b sachant que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{7}{3}$ et $\int_1^2 f(x)dx = \frac{31}{3}$ puis calculer $\int_0^2 f(x)dx$.

Linéarité : $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$;

EX 8 Calculer $\int_1^2 1 + \frac{1}{x}dx - \int_1^2 \frac{1}{x}dx$

Positivité : si $a \le b$ et $f \ge 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$;

Intégration d'une inégalité : si $a \le b$ et $f \le g$, alors $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$;

EX 9 On considère une fonction f définie et dérivable sur [0 ; 2], telle que, pour tout x de cet intervalle : $x^2 + 2x \le f(x) \le x^2 + 2x + 2$

Déterminer un encadrement de $\int_0^2 f(x)dx$

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.

Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
on appelle valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$ le réel : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
L'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ est l'aire du rectangle dont les côtés ont pour longueur μ et (b – a) .

Inégalité de la moyenne

Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et m et M deux réels tels que, pour tout x de l'intervalle $[a\ ;\ b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)$

EX 10 Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = x^2 - 5x + 1$
Déterminer la valeur moyenne de f sur [-1 ; 2].

EX 11 Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \cos x$.
En utilisant un encadrement de $\cos x$, donner un encadrement de $\displaystyle\int_2^5 f(x)dx$

EX 12
Soit a un réel positif.

1. Calculer en fonction de a, l'intégrale définie par : $\mathrm{I}(a) = \displaystyle\int_o^a \left(6\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x}\right)dx$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\mathrm{I}(a) = 4$.

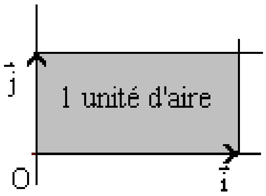
EX 13
L'objet de l'exercice est de calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 (x^2 + x - 1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x$.

Soit $\mathrm{F} : x \mapsto (\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c})\mathrm{e}^{-x}$ où a, b, c, sont trois nombres réels.
Calculer $\mathrm{F}'(x)$ puis déterminer a, b, c pour que F soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par
$f(x) = (x^2 + x - 1)e^{-x}$
Calculer alors I.

EX 14 On considère la fonction f définie sur [-4 ; 3] par $f(x) = x^2 + x - 6$
1. Déterminer le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
2. Représenter la fonction f dans un repère $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ )$. (unité graphique le cm).
3. Etudier le signe de f
4. À l'aide du graphique, vérifier le signe de f
5. Calculer la valeur moyenne de f sur [-4 ; 3].

Calcul d'aire.

Attention: les résultats sont donnés en unités d'aire.
L'unité d'aire est égale à la mesure de l'aire du rectangle dont les côtés ont pour mesures les normes des vecteurs unitaires.

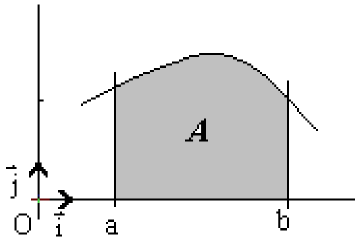


Aire comprise entre une courbe et l'axe des abscisses.

Soit ***A*** l'aire comprise entre la courbe représentative d'une fonction *f*, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

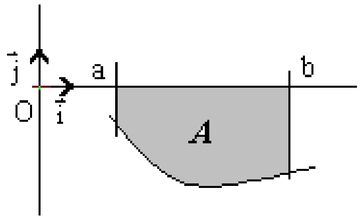
1) Si f est une fonction positive et intégrable sur $[\, a , b \,]$

$$\boldsymbol{A} = \int_a^b f(x)dx$$



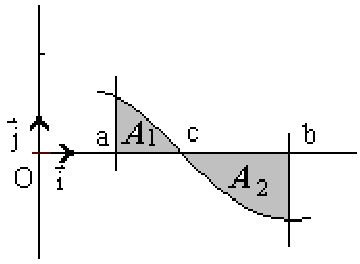
2) Si f est une fonction négative et intégrable sur $[\, a , b \,]$

$$\boldsymbol{A} = -\int_a^b f(x)dx$$



3) Si f est une fonction positive sur $[\, a , c \,]$, négative sur $[\, c , b \,]$:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{A_2} = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$



EX 15 Soit f la fonction définie sur $]\, 0 \,; +\infty [$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ et C sa courbe représentative .

1. Etudier les variations de *f*
2. Déterminer l'abscisse du point d'intersection A de C et de l'axe des abscisses.
3. Donner une équation de la tangente T à C en A.
4. Représenter C et T dans un repère orthonormé (unité 2cm).

Soit h la fonction définie sur $]\, 0 \,; +\infty [$ par : $h(x) = (\ln x)^2$

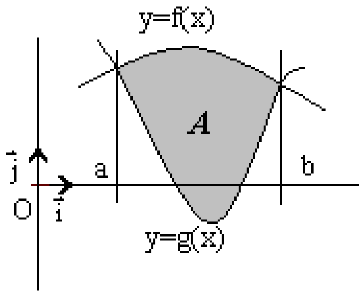
1. Déterminer la fonction dérivée de *h.*
2. En déduire une primitive de *f* sur $]\, 0 \,; +\infty [$.
3. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

Aire comprise entre deux courbes.

Soit ***A*** l'aire comprise entre les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

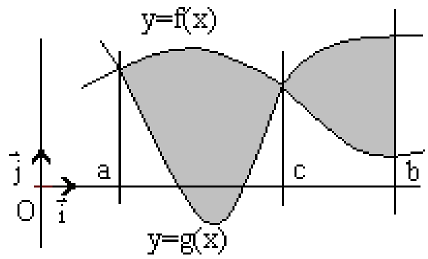
1) Si sur [a , b] , $f \geq g$, alors :

A = $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$



2) Si sur [a , c] , $f \geq g$ et si sur [c , b] , $g \geq f$, alors :

A = $\int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$



EX 16 Soit *f* la fonction définie sur ***R*** par : $f(x) = e^x - xe$

1. Etudier la limite de *f* en $-\infty$.
2. Vérifier que pour *x* non nul : $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - e\right)$. En déduire la limite de *f* en $+\infty$.
3. Etudier les variations de *f* et tracer son tableau de variations.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 3 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Montrer que la droite D d'équation $y = -xe$ est asymptote à $\mathcal{C}$ et étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite D.
2. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, D, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -1$.