VOCABULAIRE DES PROBABILITES

Un sac contient 7 numéros: 4 rouges R_1 , R_2 , R_3 ,R_4 et 3 blancs B_5 , B_6 , B_7 .
On tire au hasard un numéro du sac.

Vocabulaire	Signification	Exemples
Expérience aléatoire ou épreuve	Expérience dont le résultat n'est pas prévisible parmi des résultats possibles	Tirer un numéro du sac
Eventualité	Issue possible de l'épreuve	Tirer R_3
Univers Ω	Ensemble de toutes les éventualités issues de l'épreuve	$\Omega = \{R_1, R_2, R_3, R_4, B_5, B_6, B_7\}$
Evénement	Ensemble des éventualités liées à une action, une situation. C'est une partie de l'univers	A: ‘‘ Obtenir un numéro impair ’’ $A = \{R_1, R_3, B_5, B_7\}$ B: ‘‘ Obtenir un numéro rouge ’’ $B = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$
Evénement élémentaire	Evénement n'ayant qu'une seule éventualité	C: ‘‘ Obtenir le numéro 7 ’’ $C = \{B_7\}$
Evénement certain	Evénement contenant toutes les éventualités de l'épreuve	D: ‘‘ Obtenir un numéro inférieur à 10 ’’ $D = \Omega$
Evénement impossible	Evénement qui ne se réalise jamais	E: ‘‘ Obtenir un numéro vert ’’ $E = \varnothing$
Intersection d' événements $A \cap B$	Evénement formé par l'ensemble des éventualités communes à A et à B	$A \cap B$: ‘‘ Obtenir un numéro impair et rouge ’’ $A \cap B = \{R_1, R_3\}$
Réunion d' événements $A \cup B$	Evénement formé par l'ensemble des éventualités de A ou de B	$A \cup B$: ‘‘ Obtenir un numéro impair ou rouge ’’ $A \cup B = \{R_1, R_2, R_3, R_4, B_5, B_7\}$
Evénements incompatibles (ou disjoints)	Evénements n'ayant aucune éventualité commune. Leur intersection est vide	F: ‘‘ Obtenir un numéro blanc’’ G: ‘‘ Obtenir R_3 ’’ $F \cap G = \varnothing$
Evénements contraires A et $\overline{A}$	Evénements incompatibles dont la réunion forme l'univers	$\overline{A}$: ‘‘ Obtenir un numéro pair ’’ $\overline{A} = \{R_2, R_4, B_6\}$
Système complet d'événements	Un système d'événements est dit complet si et seulement si: • les événements sont deux à deux incompatibles • aucun n'est impossible • leur réunion forme Ω Un système complet d'événements est une partition de Ω	$H_1 = \{R_1, R_2, R_3\}$ $H_2 = \{B_5, B_6\}$ $H_3 = \{R_4, B_7\}$
Inclusion $J \subset K$	Si J est réalisé alors K l'est aussi	$J = \{R_1, B_5\}$ $K = \{R_1, R_2, B_5, B_6\}$

PROBABILITES

Définition

Définir une probabilité, liée à une épreuve sur un univers Ω, c'est associer à chaque événement un nombre compris entre 0 et 1 tel que:

- la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1
- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Propriétés

Soit A et B deux événements de Ω.

- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- $p(\varnothing) = 0$
- $p(\Omega) = 1$
- Si $A \subset B$ alors $p(A) \leq p(B)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- Si A et B sont incompatibles $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est un système d'événements deux à deux incompatibles alors :
  $p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$
- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est un système complet d'événements alors $\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1$

Equiprobabilité

Lors d'une épreuve, si toutes les éventualités ont la même chance d'apparaître, il y a équiprobabilité.

Dans le cas d' équiprobabilité : $p(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$

EX 1

20 chevaux sont au départ d'une course. Quelle est la probabilité de gagner le tiercé:
a) dans l'ordre ? b) dans le désordre ?

PROBABILITE CONDITIONNELLE D'UN EVENEMENT

Il s'agit de calculer la probabilité d'un événement B, sachant qu'un événement A s'est réalisé.

Définition.

Soit p une probabilité sur un univers Ω et soit A un événement de probabilité non nulle.
Pour tout événement B, on appelle probabilité sachant A de B le réel noté $p_A(B)$ défini par

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

La probabilité sachant A est appelée aussi probabilité conditionnelle à A.

Cas particulier.

- Si A implique B, c'est à dire si $A \subset B$, on a $A \cap B = A$ d'où $p_A(B) = 1$
- Si B implique A, c'est à dire si $B \subset A$, on a $A \cap B = B$ d'où $p_A(B) = \dfrac{p(B)}{p(A)}$

Propriétés d'une intersection.

Soit p une probabilité sur un univers Ω et soit A un événement de probabilité non nulle.
Pour tout événement B on a : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$ d'où $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

Calcul de p (B).

$A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ étant incompatibles on a : $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$

EX 2

Dans une population donnée, 15 % des individus ont une maladie Ma. Parmi les individus atteints par la maladie Ma, 20 % ont une maladie Mb et parmi les individus non atteints par la maladie Ma, 4 % ont la maladie Mb. On choisit un individu au hasard et on considère les événements:
A : ‘‘ L'individu est atteint par la maladie Ma ’’
B : ‘‘ L'individu est atteint par la maladie Mb ’’

- Donner les valeurs de $p(A)$, $p_A(B)$, $p_{\overline{A}}(B)$.
- Calculer $p(B)$, $p_B(A)$.

EX 3

Une société de produits pharmaceutiques fabrique en très grande quantité un certain type de comprimés. un comprimé est conforme si sa masse exprimée en grammes appartient à l'intervalle [1,2 ; 1,3].
La probabilité qu'un comprimé soit conforme est 0,98.
On choisit un comprimé au hasard. On note :
A : l'événement ‘‘ Un comprimé est conforme ’’
B : l'événement ‘‘ Un comprimé est refusé ’’
On contrôle tous les comprimés. Le mécanisme de contrôle est tel que :

- Un comprimé conforme est accepté avec une probabilité de 0,98
- Un comprimé qui n'est pas conforme est refusé avec une probabilité de 0,99.

1) Déterminer $p_A(B)$, $p(A \cap B)$, $p(\overline{A} \cap B)$
2) Calculer:
a) la probabilité qu'un comprimé soit refusé.
b) la probabilité qu'un comprimé soit conforme sachant qu'il est refusé.

EX 4
Une entreprise a produit 10000 pièces dans la semaine.
Ces pièces proviennent de 4 ateliers : l'atelier A a produit 3000 pièces, l'atelier B a produit 2500 pièces, l'atelier C a produit 3500 pièces et l'atelier D a produit 1000 pièces.
Le pourcentage de pièces conformes aux normes européennes est le suivant :
Pour l'atelier A : 95%, pour l'atelier B : 92%, pour l'atelier C : 93% et pour l'atelier D : 97%.
On choisit au hasard un pièce parmi les 10000fabriquées dans la semaine. Quel est la probabilité que cette pièce soit conforme aux normes européennes ?

Indépendance de deux événements.

Deux événements A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de réalisation de l'autre. On a alors:
$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ et aussi $p(A) = p_B(A)$ et $p(B) = p_A(B)$.

L'événement certain (Ω) est indépendant de tous les autres, ainsi que l'événement impossible ($\varnothing$).

EX 5
On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement : « tirer un as » et B l'événement : « tirer un cœur »
A et B sont-ils indépendants ?

EX 6
On a posé à un groupe de 36 étudiants de BTS la question : « Regardez-vous des séries en streaming ? »
Les réponses sont les suivantes :

	Oui	Non
Filles	20	4
Garçons	10	2

Chaque élève a noté sa réponse sur une fiche. On prélève au hasard une fiche parmi les 36. Tous les tirages sont équiprobables.
On considère les événements suivants :
O : « la fiche est celle d'un élève qui a répondu oui »
F : « la fiche est celle d'une fille»
Les événements O et F sont-ils indépendants ?

VARIABLE ALÉATOIRE.

Définition.

Ω étant l'univers associé à une épreuve aléatoire, définir une variable aléatoire sur Ω c'est associer un réel à chaque éventualité de Ω .
(Attention, une variable aléatoire est une fonction).

Loi de probabilité.

X étant une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω , définir la loi de probabilité de X, c'est associer à chaque valeur x_i prise par X, la probabilité p (X = x_i)

EX 7

Une roue de loterie est partagée en 12 secteurs égaux : 6 bleus, 3 verts, 2 jaunes et 1 rose .
Lors d'une partie, on fait tourner la roue et un repère fixe désigne la couleur obtenue à l'arrêt.
Le joueur gagne 50 euros si la roue s'arrête sur la zone rose, 10 si la roue s'arrête sur la zone jaune, 0 si la roue s'arrête sur la zone verte et il perd 10 euros si la roue s'arrête sur la zone bleue.
Définir une variable aléatoire correspondant à cette épreuve et déterminer sa loi de probabilité.

Espérance mathématique d'une variable aléatoire, Variance, Ecart-type.

Soit { $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ } l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.
Pour tout nombre entier i tel que $1 \leq i \leq n$ on pose p_i = p (X = x_i).

On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X le nombre réel noté E (X) défini par:

$$E (X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Si E (X) = 0 , on dit que X est une variable centrée.

EX 8

Dans l'exercice précédent, déterminer le gain moyen que l'on peut espérer pour chaque partie.

On appelle variance de la variable aléatoire X le nombre réel positif noté V (X) défini par:

$$V (X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E (X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E (X)^2$$

Si V (X) = 1 , on dit que X est une variable réduite.

On appelle écart-type de la variable aléatoire X le nombre réel positif noté σ (X) défini par:

$$\sigma (X) = \sqrt{V(X)}$$

Fonction de répartition.

X étant une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω ,on appelle fonction de répartition de X , la fonction F, définie de $\mathbb{R}$ vers [0 ; 1] par :

$$F(x) = p(X \leq x)$$

On a : $p(X > x) = 1 - F(x)$ et $p(x < X \leq x') = F(x') - F(x)$
F est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

EX 9

Une urne contient 10 boules: 5 blanches, 2 noires et 3 rouges. On extrait 1 boule de l'urne.
Sur cette épreuve on considère le jeu suivant:

- Tirer une boule noire rapporte 6 points.
- Tirer une boule rouge rapporte 2 points.
- Tirer une boule blanche enlève 2 points.

On désigne par X la somme des points associée au tirage d'une boule.
Combien de points obtient-on en moyenne par tirage ?

EX 10

Dans une urne il y a 10 boules numérotées de 0 à 9. On tire 2 boules, simultanément, de l'urne.
A chaque tirage on associe le plus petit des deux numéros sortis. On note X la variable aléatoire associée.
Déterminer la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition.
Déterminer les probabilités des événements: $(X \leq 6)$; $(X > 5)$; $(3 < X \leq 6)$

EX 11

Un dé cubique est pipé de telle façon que, si on note p_i la probabilité d'apparition de la face notée i , on a:
$p_2 = p_1$; $p_3 = 3\ p_1$; $p_4 = 2\ p_1$; $p_5 = 2\ p_1$; $p_6 = 2\ p_3$.
On lance le dé 2 fois de suite et on note X la variable aléatoire qui donne la somme des deux faces apparues.

- Déterminer la loi de probabilité de X.
- Déterminer E (X) , V (X) et σ (X).
- Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

Lois de probabilité

Une loi discrète: la loi binomiale

Epreuves indépendantes.

Deux épreuves aléatoires sont dites indépendantes lorsque tout événement de l'une est indépendant de tout événement de l'autre.

Epreuve de Bernoulli.

C'est une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles, que l'on nomme souvent succès et échec.
Si p est la probabilité du succès, alors $q = 1 - p$ est celle de l'échec.

Schéma de Bernoulli.

On appelle schéma de Bernoulli de paramètres n et p l'expérience aléatoire consistant à effectuer successivement n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès p.

Loi binomiale.

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $B\,(n\,,p)$ de paramètres n et p, où n est un nombre entier naturel et p un nombre réel compris entre 0 et 1 lorsque X donne le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p. (cas d'un schéma de Bernoulli)
Le résultat du calcul se lit directement à la machine.

Propriétés.

Soit une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $B\,(n\,,p)$:
$E(X) = np$; $V(X) = npq$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

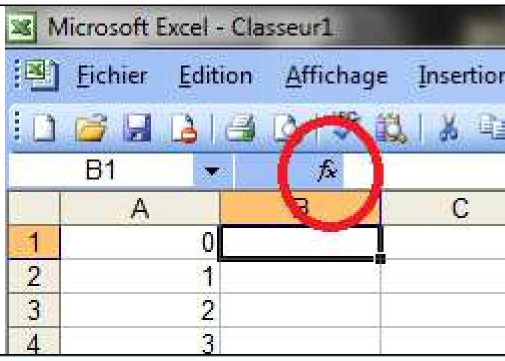
EX 12 A chaque tir, la probabilité pour que le tireur x touche la cible est de 0,7. Il tire 3 fois de suite;

- Quelle est la probabilité qu'il touche la cible 3 fois ?
- Quelle est la probabilité qu'il touche la cible 2 fois ?
- Représenter la loi de probabilité et la fonction de répartition.

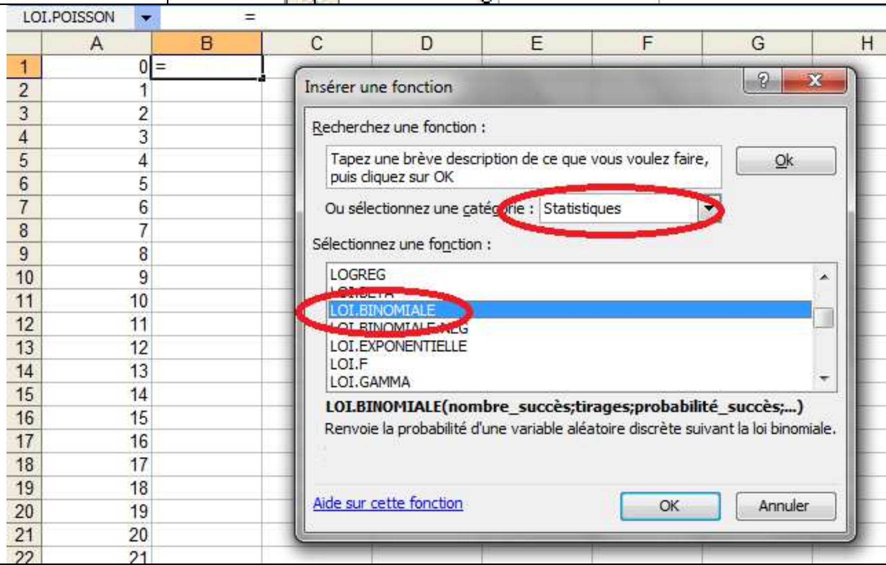
Loi binomiale et tableur.

Le calcul de $p(X=k)$ à l'aide d'un tableur est réalisé avec l'instruction: $\boxed{\text{=LOI.BINOMIALE(k;n;p;FAUX)}}$
Le calcul de $p(X\leq k)$ à l'aide d'un tableur est réalisé avec l'instruction: $\boxed{\text{=LOI.BINOMIALE(k;n;p;VRAI)}}$

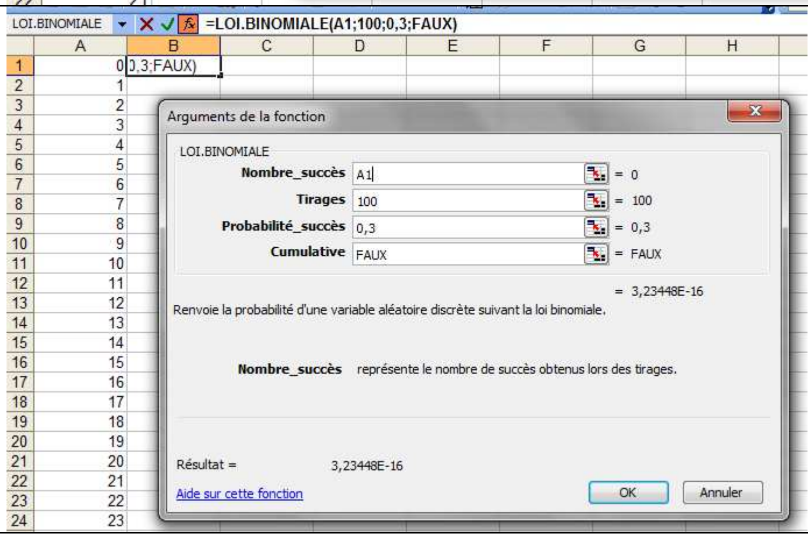
Pour insérer une commande de probabilité cliquer sur *fx*



Puis choisir *Statistiques* et LOI.BINOMIALE



Dans la boîte de dialogue, renseigner la case indiquant le nombre de succès, le nombre d'épreuves *n*, la probabilité du succès *p* puis FAUX ou VRAI



EX 13 On lance 2 dés puis on totalise les points marqués.
Au bout de 20 lancers, quelle est la probabilité d'avoir obtenu 10 fois un total supérieur ou égal à 8 ?
Représenter la loi de probabilité et la fonction de répartition sur tableur et calculatrice.

EX 14

Dans une urne il y a 10 boules blanches et 18 boules rouges indiscernables au toucher. On considère l'épreuve qui consiste à extraire, au hasard, l'une après l'autre et sans remise, deux boules de l'urne. On est dans une situation d'équiprobabilité. On donnera, pour chaque résultat, la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.

1) Déterminer la probabilité de l'événement suivant: E : ‘‘ La deuxième boule tirée est blanche ’’

2) On répète 5 fois de suite l'épreuve précédente. Après chaque épreuve, les deux boules tirées sont remises dans l'urne. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie de 5 épreuves, associe le nombre de fois que se produit l'événement E.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale; préciser les paramètres de cette loi.

b) Calculer la probabilité de l'événement F: ‘‘ E se produit exactement deux fois ’’

EX 15

Une usine fabrique des pièces dont 1,8 % sont défectueuses.

Le contrôle des pièces s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes:

- Sachant qu'une pièce est bonne, on l'accepte avec une probabilité de 0,97.
- Sachant qu'une pièce est mauvaise, on la refuse avec une probabilité de 0,99.

1) Quelle est la probabilité qu'une pièce soit défectueuse ?

2) a) Montrer que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée est 0,0002.

b) Montrer que la probabilité qu'une pièce soit bonne et refusée est 0,029.

c) Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur dans le contrôle.

d) Quelle est la probabilité qu'il y ait deux erreurs lorsque l'on effectue 5 contrôles.

Une loi discrète: la loi de Poisson

Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $P(\lambda)$ de paramètre λ positif lorsque sa loi de probabilité est définie par :

Pour tout nombre entier naturel k : p (X = k) = $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Le résultat est donné directement par la calculatrice.

Propriétés.

Soit une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson $P(\lambda)$:

E (X) = λ ; V (X) = λ ; σ(X) = $\sqrt{\lambda}$

Champ d'intervention.

La loi de poisson correspond au nombre de réalisations observées, durant un intervalle de temps de longueur donnée, lorsque le temps d'attente entre deux réalisations est fourni par une loi exponentielle. L'idée à retenir est qu'une loi de Poisson intervient dans la modélisation de phénomènes aléatoires où le futur est indépendant du passé. (par exemple: pannes de machines, sinistres, mortalité, stocks ...)

Loi de Poisson et tableur.

Le calcul de $p(X=x)$ à l'aide d'un tableur est réalisé avec l'instruction: $\boxed{\text{=LOI.POISSON}(x;\lambda;\text{FAUX})}$

Le calcul de $p(X\leq x)$ à l'aide d'un tableur est réalisé avec l'instruction: $\boxed{\text{=LOI.POISSON}(x;\lambda;\text{VRAI})}$

EX 16

a) Soit une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre 4. Déterminer la probabilité d'avoir $7 \leq X \leq 9$. Représenter la loi de probabilité et la fonction de répartition sur tableur.

b) Soit une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre 7. Déterminer la plus petite valeur de k vérifiant: $p (X \leq k) \geq 0,80$.

c) Soit une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson. Déterminer à 10^{-2} près le paramètre λ, sachant que $p (X = 0) = 0,3$

EX 17

Un chef d'entreprise, pour éviter l'attente des camions venant livrer, envisage, si cela se montre nécessaire, de construire de nouveaux postes de déchargement. Il y en a actuellement 5.
On considère, pour simplifier l'étude, qu'il faut une journée pour décharger un camion. Une enquête préalable sur 120 jours ouvrables a donné les résultats suivants:

Nbe x_i d'arrivées / jour	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre n_i de jours	2	10	18	22	23	19	12	7	4	2	1

A) Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série.
B) La variable aléatoire X mesurant le nombre de camions venant livrer, par jour, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$

a) Quelle est, à 0,001 près, la probabilité de n'avoir aucun camion en attente ?

b) Combien faudrait-il de postes de déchargement pour que la probabilité de n'avoir aucun camion en attente soit supérieure à 0,95 ?

c) On prévoit, pour les années à venir, un doublement de la fréquence de livraison: $\lambda = 8$. Combien faudrait-il de postes de déchargement pour que la probabilité de n'avoir aucun camion en attente soit supérieure à 0,95 ?

EX 18

Une entreprise dispose de 100 camions pour transporter sa production.
On suppose que la variable aléatoire X mesurant le nombre de camions en panne un jour choisi au hasard suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.
A) Calculer la probabilité d'avoir au moins 95 camions en service un jour donné.
B) Calculer le nombre de camions dont on peut être sûr de disposer un jour donné avec une probabilité de 98 %.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

On admet que si n est ''grand '', p '' voisin '' de 0 et np pas ''trop grand '', alors la loi $\mathcal{B}(n, p)$ est trés proche de la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda = np$.
(En général on utilise cette approximation lorsque $n \geq 30$ et $p \leq 0{,}1$ et $np < 15$, ou lorsque $n \geq 50$ et $p \leq 0{,}1$ et $np \leq 10$).
L'intérêt de ce théorème est que l'on peut remplacer une loi dépendant de deux paramètres par une loi à un paramètre, l'espérance mathématique étant conservée.

EX 19

On a observé que 2 % des micro-ordinateurs d'un type donné tombaient en panne par mois d'utilisation.
On suppose que les pannes de tels micros sont indépendantes.
On note X la variable aléatoire associant le nombre mensuel de pannes prévisibles à chaque parc de 150 machines (on assimilera le choix des 150 machines à un tirage avec remise et on supposera les pannes indépendantes)

1) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

a) le nombre mensuel de pannes est 5.
b) le nombre mensuel de pannes est au plus égal à 3.

2) On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson. Donner le paramètre de cette loi.

3) On utilise cette approximation dans la suite de l'exercice.

a) Refaire les calculs du 1).
b) Déterminer le nombre minimal N tel que la probabilité de l'événement: ''le nombre mensuel de pannes est au plus N '' soit supérieur à 0,99.

Lois de probabilité continues (ou à densité).

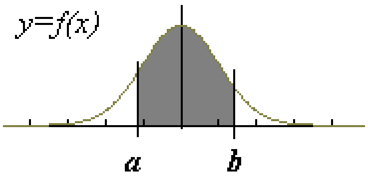
Lorsque l'univers d'une expérience aléatoire est un ensemble fini, la loi de probabilité définie sur cet ensemble fini de valeurs est une loi discrète.
Lorsque les issues d'une expérience ou les valeurs prises par une variable aléatoire peuvent être n'importe quel nombre d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, on parle de loi continue.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On appelle densité de probabilité sur I toute fonction f définie sur I vérifiant les trois conditions suivantes :

- f est continue sur I
- f est positive sur I
- l'aire située sous sa courbe C est égale à une unité d'aire

On définit la loi de probabilité p de densité f sur l'intervalle I en associant à tout intervalle $[a\ ;\ b]$ inclus dans I le réel : $p\,(\,[a\ ;\ b]\,) = \int_a^b f\,(x)\,dx$
On dit que p est une loi de probabilité à densité sur I ou une loi continue sur I.

$$p\,(\,[a\ ;\ b]\,) = p\,(\,a \leq X \leq b\,) = \int_a^b f\,(x)\,dx\ ;$$



$p\,(\,X = a\,)$ est nulle (aire d'un segment), donc on peut utiliser indifféremment < ou $\leq$ dans l'écriture de la probabilité $p\,(\,a \leq X \leq b\,)$

Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f, définie un intervalle I de $\mathbb{R}$.
L'espérance de X est : $E\,(X) = \int_I x f\,(\,x\,)\,dx$

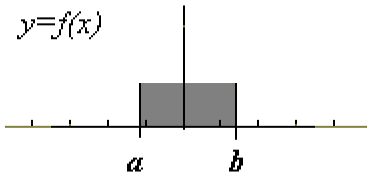
La variance de X est : $V\,(X) = \int_I (x - E(x))^2\, f\,(x)\,dx$

L'écart-type de X est $\sigma\,(X) = \sqrt{V\,(X)}$

Une loi continue : la loi uniforme.

On appelle loi uniforme sur l'intervalle I = [a ; b] de $\boldsymbol{R}$, la loi de probabilité continue sur I dont la densité f est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{b-a} \quad \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$



Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle [α ; β] inclus dans I = [a ; b] est égale au quotient de la longueur de [α ; β] par celle de [a ; b]

$$p([\alpha ; \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle I = [a ; b] de $\boldsymbol{R}$,

L'espérance de X est : $E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx = \dfrac{a+b}{2}$

La variance de X est : $V(X) = \int_I (x-E(x))^2 f(x)\,dx = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \dfrac{b-a}{\sqrt{12}}$

La fonction de répartition de la loi uniforme sur [a ; b] est la fonction F définie sur $\boldsymbol{R}$ par :

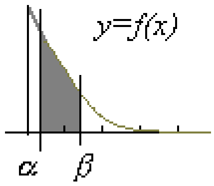
$$\begin{cases} F(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < a \\ F(x) = \dfrac{x-a}{b-a} \quad \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ F(x) = 1 \quad \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

EX 20 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [0 ;4].
Donner la fonction densité de X
Déterminer les probabilités suivantes : $p(X \in [1,3])$, $p(X \leq 2,5)$, $p(0,2 \leq X \leq 3,5)$, $p(X \leq 1)$, $p(X = 1)$, $p(X > 1)$.
Déterminer l'espérance $E(X)$ et en donner une interprétation
Déterminer la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$
Représenter cette loi et sa fonction de répartition

EX 21
Sur une autoroute, deux postes consécutifs de téléphone de secours A et B sont distants de 5 km.
On note X la variable aléatoire qui, à tout véhicule tombant en panne entre A et B, associe la distance en km parcourue depuis le poste A
On considère que X suit la loi uniforme sur l'intervalle [0 ;5].
Donner la fonction densité de X
Déterminer les probabilités suivantes : $p(X \in [0,1])$, $p(X \in [3,5])$
Déterminer l'espérance $E(X)$ et en donner une interprétation
Déterminer la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$

Une loi continue : la loi exponentielle.

On appelle loi exponentielle de paramètre λ la loi continue admettant pour densité la fonction *f* définie sur [0 ; $+\infty$ [par $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$ ou λ est un réel positif fixé.



Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle [$\alpha ; \beta$] inclus dans [0 ; $+\infty$ [est égale à :

$$p([\,\alpha ; \beta\,]) = \int_\alpha^\beta \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = [-e^{-\lambda x}]_\alpha^\beta$$

On peut donc écrire : $p(X \le x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = -e^{-\lambda x} + e^0 = 1 - e^{-\lambda x}$

et donc $p(X > x) = 1 - p(X \le x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$

Dans le cas de la loi exponentielle : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$; $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$. $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Loi exponentielle et tableur.

Le calcul de $p(X \le k)$ à l'aide d'un tableur est réalisé avec l'instruction:
=LOI.EXPONENTELLE(k;λ;VRAI)

EX 22

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètres 0,05
Calculer les probabilités suivantes : $p(X \in [25,35])$, $p(X \le 20)$, $p(0,2 \le X \le 3,5)$, $p(X > 40)$.
Déterminer l'espérance $E(X)$ et en donner une interprétation.
Représenter la loi de probabilité et la fonction de répartition sur tableur.

EX 23

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètres 0,2
Calculer les probabilités suivantes : $p(X \in [1,3])$, $p(X \le 6)$, $p(X > 4)$.
Déterminer l'espérance $E(X)$ et en donner une interprétation

EX 24

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètres 0,1
Déterminer le nombre réel *x* tel que $p(X \le x) = 0,4$

EX 25

1. Cas particulier
a) Donner la fonction de densité f_2 de la loi exponentielle de paramètre 2.
b) Calculer $f_2(0)$ et le nombre dérivé $f_2'(0)$.
c) Déterminer une équation de T_2 et en déduire l'abscisse du point où T_2 coupe l'axe des abscisses
d) Représenter sur l'écran d'une calculatrice ou d'un ordinateur la représentation graphique C_2 de f_2 ainsi que sa tangente T_2 en son point d'abscisse 0.

2. Cas général
Reprendre les questions a), c) et d) en remplaçant 2 par λ où $\lambda > 0$.
En déduire une interprétation graphique de l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ .

EX 26
T est la variable aléatoire qui, à toute lampe d'un certain type prélevée au hasard dans un stock important, associe sa durée de bon fonctionnement (en heures) avant la rupture du filament.
On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,0004.
1. Donner la fonction de densité de T.
2. Calculer les probabilités des événements suivants:
A: « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est comprise entre 2000 h et 2800 h»,
B: « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est inférieure à 3 000 h »,
C: « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est supérieure à 2 500 h »,
D : « la durée de bon fonctionnement, de la lampe prélevée est égale à 2 800 h ».
3. Déterminer l'espérance E(T) et donner une interprétation du résultat dans le contexte de l'énoncé.

EX 27
T est la variable aléatoire qui, à toute machine à embouteiller d'un certain type prélevée au hasard dans un stock important, associe sa durée de bon fonctionnement (en jours) avant une défaillance.
On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,005.
1. Donner la fonction de densité de T.
2. Calculer les probabilités des événements suivants :
A : « la durée de bon fonctionnement de la machine prélevée est comprise entre 150 et 250 jours »,
B: « la durée de bon fonctionnement de la machine prélevée est inférieure à 275 jours »,
C: « la durée de bon fonctionnement de la machine prélevée est supérieure à 200 jours »,
D - « la durée de bon fonctionnement de la machine prélevée est égale à 220 jours ».
3. Déterminer l'espérance E(T) et donner une interprétation du résultat dans le contexte de l'énoncé.

EX 28
1. Claudius le jardinier a installé 10 bornes lumineuses pour baliser une allée du jardin. Chaque borne est équipée d'une ampoule halogène de 35 watts. On admet que ces ampoules fonctionnent indépendamment les unes des autres et que la variable T qui, à une ampoule quelconque, associe sa durée de vie t exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$
a) Quelle est la durée de vie moyenne d'une ampoule ?
b) Quelle est la probabilité qu'une ampoule donnée fonctionne encore après 20 000 heures d'utilisation ?

2. Désireux de faire des économies, Claudius se rend dans un magasin spécialisé et achète 10 ampoules de nouvelle génération, fabriquées à partir de leds et ayant une puissance très faible de 1 watt. On peut lire sur l'étiquette du blister contenant une de ces ampoules que sa durée de vie moyenne est de 80 000 heures. On admet que ces ampoules fonctionnent indépendamment les unes des autres et que la variable aléatoire W qui, à une ampoule quelconque, associe sa durée de vie *t* exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre μ .
a) Calculer la valeur exacte de μ .
b) Quelle est la probabilité qu'une ampoule de ce type fonctionne encore 20 000 heures après sa mise en service ?

Une loi continue : la loi normale

Activité

On s'intéresse à la répartition des résultats de la somme de 12 nombres, chacun de ces nombres étant tiré au hasard entre 0 et 1, c'est-à-dire selon une loi uniforme.

- Avec le tableur de GeoGebra entrer en cellule A1 l'instruction : =random()+random()+random()+random()+random()+random()+random()+random()+random()+random()+random()+random() et recopier jusqu'en E1000.
- Sélectionner les 5000 valeurs puis, par un clic droit créer une liste (liste1)

On regroupe ensuite ces valeurs en *n* classes.

- Créer un curseur *n* allant de 5 à 30
- Créer un histogramme en entrant dans la barre de saisie : Histogramme[false, Classes[liste1,n],liste1,true,1/5000]

Régler le curseur à *n* = 5 et appuyer plusieurs fois sur F9 puis augmenter *n* jusqu'à 30, en appuyant plusieurs fois sur F9 pour chaque valeur de *n*.
Que constate-t-on ?

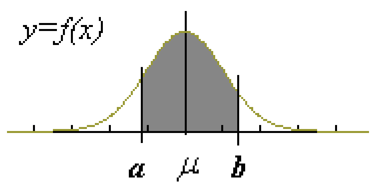
La loi uniforme sur [0 ;1] a une espérance de 0,5 et une variance de $\frac{1}{12}$.
En répétant à l'identique la même expérience 12 fois, la somme des 12 nombres conduit à des valeurs de moyenne de $12\times 0{,}5 = 6$ et de variance $12\times\frac{1}{12} = 1$
Saisir sur GeoGebra l'instruction : f=Normale[6,1,x]
Avec le curseur réglé à *n* = 30, faire plusieurs fois F9.
Qu'observe-t-on ?
Donner d'après la fenêtre « algèbre » de GeoGebra, l'expression analytique de la fonction de densité *f*.

Cette activité illustre le fait que lorsqu'un phénomène aléatoire est la somme d'un assez grand nombre de phénomènes aléatoires indépendants de même loi (quelle que soit cette loi) il suit une loi normale.

Définition

On appelle loi normale $N(\mu,\sigma)$ de paramètres μ et σ la loi continue admettant pour densité la fonction *f* définie sur ***R*** par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle $[\alpha;\beta]$ est égale à :

$$p([\alpha;\beta]) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Une loi normale intervient dans la modélisation de phénomènes aléatoires possédant de nombreuses causes indépendantes dont les effets s'ajoutent, sans que l'un soit dominant.

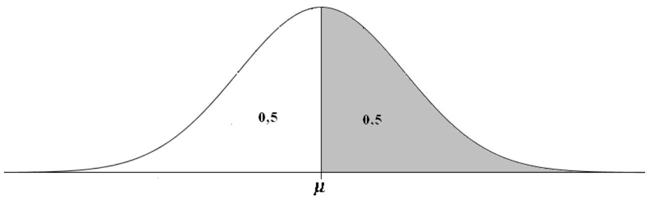
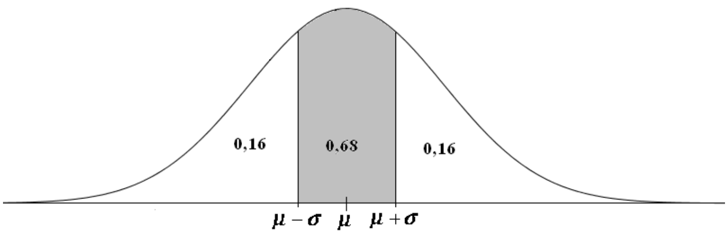
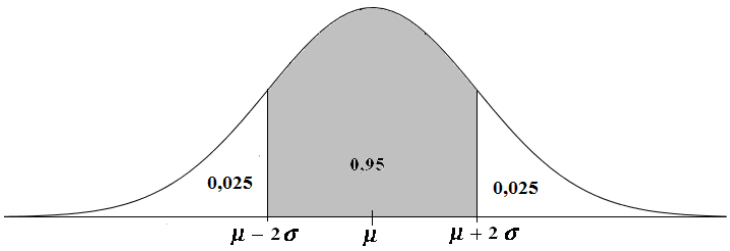
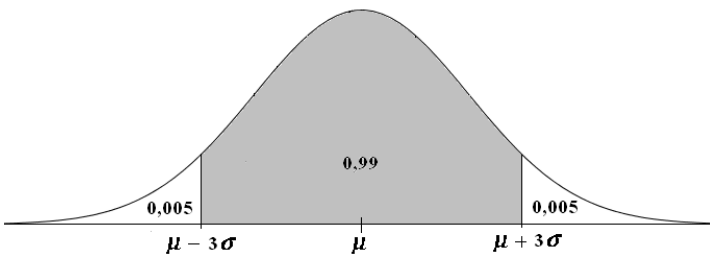
Soit une variable aléatoire X suivant la loi normale $N(\mu\ ,\ \sigma)$:
$E(X) = \mu$; $V(X) = \sigma^2$; $\sigma(X) = \sigma$

Loi normale centrée réduite $N(0\ ,\ 1)$

Si variable aléatoire X suit la loi normale $N(\mu\ ,\ \sigma)$, alors la variable $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0\ ,\ 1)$

La densité de probabilité de T est la fonction f définie sur $\boldsymbol{R}$ par: $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$ et qui a pour représentation graphique la courbe de Gauss.

Propriétés

$p(X \geq \mu) = 0{,}5$	
$p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0{,}68$	
$p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}95$	
$p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0{,}99$	

Loi normale et tableur.

Le calcul de $p(X \leq k)$ à l'aide d'un tableur est réalisé avec l'instruction: $\boxed{\text{=LOI.NORMALE}(x;\mu;\sigma;\text{VRAI})}$

Représenter la loi normale et sa fonction de répartition sur tableur

Pour cela on créera en colonne A une liste de nombre variant de –5 à 5 avec un pas de 0,01.
En colonne B, chaque ligne *i* donne le résultat de $p(X=A_i)$
En C1 on répète B1 et dans la suite de la colonne C on cumule la somme des résultats de C1 à C_i, pour obtenir $p(X \leq A_i)$

EX 29

Sachant que la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, déterminer:

a) $p(X \leq 2{,}53)$ b) $p(X > 1{,}27)$ c) $p(-1{,}5 \leq X \leq 2{,}31)$ d) $p(X \leq -1{,}39)$

Déterminer le nombre réel a sachant que la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et que :

a) $p(X \leq a) = 0{,}99$ b) $p(|X| \leq a) = 0{,}99$ c) $p(X \geq a) = 0{,}05$ d) $p(X \leq a) = 0{,}1$

EX 30

Sachant que la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(24 ; 6{,}5)$, calculer:

a) $p(X \geq 27)$ b) $p(X \geq 10)$ c) $p(18 \leq X \leq 20)$ d) $p(|X| \geq 27)$

EX 31

Sachant que la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(20 ; 5)$, calculer:

a) $p(X \leq 28)$ b) $p(X \geq 28)$ c) $p(12 \leq X \leq 28)$

Déterminer le réel a tel que:

a) $p(X \leq a) = 0{,}99$ b) $p(X \leq a) = 0{,}01$ c) $p(X \geq a) = 0{,}90$ d) $p(20-a \leq X \leq 20+a) = 0{,}95$

EX 32

On ajoute du SO_2 dans un vin pour le protéger d'une part des attaques des levures et des bactéries, d'autre part de l'oxydation.
Après embouteillage on prélève des échantillons de 50 bouteilles sur la chaîne d'embouteillage et on dose dans chaque bouteille la concentration en SO_2 libre qui sera exprimée en mgL^{-1}.
La production étant trés importante, on assimile ce prélèvement à un prélèvement non exhaustif. Voici les résultats du dosage du SO_2 dans un échantillon:

Concentration (mgL^{-1})	[20 ; 20,2 [	[20,2 ; 20,4 [	[20,4 ; 20,6 [	[20,6 ; 20,8 [	[20,8 ; 21 [
Nombre de bouteilles	3	9	20	13	5

1) Donner des valeurs approchées à 10^{-3} près de la moyenne m et de l'écart-type σ de cet échantillon.

2) A chaque production obtenue après avoir ajouté du SO_2 on associe la concentration en SO_2 libre. On définit ainsi une variable aléatoire X. On admet que X suit la loi normale de moyenne 20,5 mgL^{-1} et d'écart-type 0,2 mgL^{-1} .
On estime que le vin est impropre à la consommation si la concentration en SO_2 libre est supérieure ou égale à 20,9 mgL^{-1}.
Quel est, à 1 % près, le pourcentage de bouteilles impropres à la consommation ?

EX 33

Un atelier produit des joints d'étanchéité.
La variable aléatoire X qui, à tout joint pris au hasard, associe sa durée de vie exprimée en heures suit la loi normale de moyenne 970 et d'écart-type 200.

1. Déterminer la probabilité qu'un joint pris au hasard ait une durée de vie comprise entre 720 et 1000 h.
2. Déterminer la probabilité qu'un joint pris au hasard ait une durée de vie inférieure à 620 h.
3. Un joint est défectueux si sa durée de vie est inférieure à 620 h.

Calculer le nombre présumé de joints défectueux dans un ensemble de 500 joints

EX 34

On étudie la cote d'une pièce produite par une machine.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce tirée au hasard, associe sa cote x.
X suit la loi normale de moyenne m = 20 mm et d'écart-type σ = 0,20 mm.

1. Une cote x est correcte si m - 3$\sigma \leq x \leq$ m + 3σ . Calculer la probabilité qu'une cote soit correcte.
2. Déterminer la valeur a telle que p (X $\leq$ a) = 0,20.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

On admet que si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ alors la loi binomiale $B\,(\,n\,,\,p\,)$ est trés proche de la loi normale $N\,(\,\mu\,,\,\sigma\,)$ où $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Correction de continuité

Si X est la variable aléatoire qui suit une loi binomiale et Y son approximation qui suit une loi normale, il faut effectuer une correction de continuité : $p\,(\,a \leq X \leq b\,) = p\,(\,a - \frac{1}{2} \leq Y \leq b + \frac{1}{2}\,)$

EX 35

On jette 10 fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée en notant à chaque fois le résultat, ce qui constitue une partie.

1) On note X la variable aléatoire qui,à chaque partie, associe le nombre de ‘‘ face’’ obtenu.

a) Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable X est une loi binomiale; on précisera les paramètres de cette loi.
b) Calculer la probabilité de l'événement E : ‘‘ le nombre de ‘‘ face’’ est compris entre 3 et 6 ’’ (bornes incluses).

2) On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par la loi normale N (m , σ).
Expliquer pourquoi on prend m = 5 et $\sigma = \sqrt{2{,}5}$.

On considère une variable aléatoire Y suivant la loi $N\,(\,5\,,\,\sqrt{2{,}5}\,)$. En utilisant cette approximation, calculer la probabilité de l'événement ‘‘ le nombre de ‘‘ face’’ est compris entre 3 et 6 ’’(bornes incluses), c'est à dire p (2,5$\leq$ Y $\leq$ 6,5).

Couples de variables aléatoires.

Soit deux variables aléatoires X et Y définies sur un même univers Ω et prenant un nombre fini de valeurs.
(X , Y) constitue un couple de variables aléatoires (ou variable aléatoire à valeurs sur $\boldsymbol{R}^2$).
L'image de toute éventualité ω par ce couple est le couple (x , y) où x est l'image de ω par X et y l'image de ω par Y.
La loi de probabilité du couple (X , Y), ou loi conjointe de (X , Y), est l'application définie sur IR^2 par: $(x_i, y_j) \mapsto p(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = p_{ij}$.
Elle est en général présentée sous forme d'un tableau à 2 entrées.

X \ Y	y_1	...	y_k	...	y_n	loi de X
x_1	p_{11}		p_{1k}		p_{1n}	p_1
...	...					
x_i	p_{i1}		p_{ik}		p_{in}	p_i
...	...					
x_m	p_{m1}		p_{mk}		p_{mn}	p_m
loi de Y	p'_1		p'_k		p'_n	1

On a : $p_i = p(X = x_i) = p_{i1} + ... + p_{in}$ et $p'_k = p(Y = y_k) = p_{1k} + ... + p_{mk}$.

On appelle probabilités marginales les valeurs des totaux par ligne et par colonne.
Attention : si la loi du couple définit les lois marginales et donc les lois des variables aléatoires X et Y, la réciproque n'est pas vraie. La connaissance des lois de X ou Y n'est pas suffisante pour connaître la loi du couple.

Exemple: les lois définies par les tableaux ci-dessous sont distinctes tout en admettant les mêmes lois marginales:

X \Y	1	2	3	
1	0,10	0,25	0,15	0,5
2	0,10	0,25	0,15	0,5
	0,2	0,5	0,3	

X \Y	1	2	3	
1	0,1	0,2	0,2	0,5
2	0,1	0,3	0,1	0,5
	0,2	0,5	0,3	

Opérations sur les variables aléatoires.

Exemple : Somme de deux variables aléatoires.

Soit deux variables aléatoires X et Y définies sur un même univers Ω et prenant un nombre fini de valeurs, on obtient la loi de probabilité de la somme S = X + Y en associant à chaque valeur de s la somme des probabilités correspondant à tous les couples dont la somme des coordonnées est égale à s.

Exemple:

X \ Y	1	2	3
1	2 / 0,1	3 / 0,2	4 / 0,2
2	3 / 0,1	4 / 0,3	5 / 0,1

s	2	3	4	5
p (S=s)	0,1	0,3	0,5	0,1

On peut définir de même les variables aléatoires : X–Y, aX+b, a et b étant des réels

Indépendance de deux variables aléatoires.

Soit X une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs k_1 , ... , k_i , ... , k_n .
Soit Y une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs k'_1 , ... , k'_i , ... , k'_n .
X et Y sont indépendantes si, pour tout *i*, $1 \leq i \leq n$,et pour tout *j*, $1 \leq j \leq p$, on a :
$p (X = k_i \text{ et } Y = k'_j) = p (X = k_i) \times p (Y = k'_j)$.
Dans le tableau, chaque probabilité est égale au produit des probabilités marginales: $p_{ij} = p_i \times p_j$
Si X et Y sont indépendantes, $E (X , Y) = E (X) \times E (Y)$

Espérance mathématique

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers:
$E (X + Y) = E (X) + E (Y)$
$E (X - Y) = E (X) - E (Y)$
$E (aX + b) = a E (X) + b$

Variance.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers et indépendantes:
$V (X + Y) = V (X) + V (Y)$
$V (X - Y) = V (X) + V (Y)$
$V (a X + b) = a^2 V (X)$

Exemple dans le cas de lois normales : Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois normales respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2 , \sigma_2)$,
alors $X_1 + X_2$ suit la loi normale de moyenne $m_1 + m_2$ et d'écart-type $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ et $X_1 - X_2$ suit la loi normale de moyenne $m_1 - m_2$ et d'écart-type $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

EX 36

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers et indépendantes et suivant respectivement les lois normales $\mathcal{N}(22 , 4)$ et $\mathcal{N}(18 , 3)$. Soit la variable aléatoire Z = X + Y. On admet que Z suit une loi normale.
Justifier que l'espérance mathématique et l'écart-type de Z sont respectivement 40 et 5.
Calculer la probabilité de l'événement $34 \leq Z \leq 48$.
Déterminer le nombre réel positif α tel que la probabilité de l'événement ‘‘ $40 - \alpha \leq Z \leq 40 + \alpha$ ’’ soit égale à 0,95.

EX 37

Une machine est sujette à 2 sortes de pannes, indépendantes l'une de l'autre: P_1 et P_2 .
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque machine de ce type, associe le nombre de pannes P_1 survenues pendant les 3 premières années d'utilisation. X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(1,5)$.
Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque machine de ce type, associe le nombre de pannes P_2 survenues pendant les 3 premières années d'utilisation. Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(0,5)$.
1) Calculer les probabilités des événements suivants:
a) il n'y a aucune panne
b) il y a exactement 3 pannes
c) il y a au plus une panne
2) Retrouver les résultats du 1) en admettant que la variable aléatoire X + Y suit une loi de Poisson de paramètre 2.

EX 38

Les parties A, B et C sont indépendantes.
Une usine fabrique des tiges métalliques.

A) dans un lot de 1000 pièces, on a mesuré les longueurs des tiges en mm.

Longueur (mm)	[67,5 ; 72,5 [	[72,5 ; 77,5 [	[77,5 ; 82,5 [	[82,5 ; 87,5 [	[87,5 ; 92,5 [
Nombre de pièces	5	95	790	100	10

1. Tracer l'histogramme de cette série statistique.
2. En supposant que dans chaque classe tous les éléments sont situés au centre, calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de la moyenne et de l'écart-type de cette série.

B) On prélève des pièces dans la production d'une journée.
On suppose que la probabilité qu'une pièce soit jugée défectueuse est 0,1. On note X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 tiges, prélevé au hasard, associe le nombre de tiges défectueuses parmi les 50.

1 a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
b) Déterminer une valeur approchée, à 10^{-4} près, de la probabilité, pour un tel échantillon:

- de n'avoir aucune pièce défectueuse.
- d'avoir au plus 2 pièces défectueuses.

2 a) On admet que la loi suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson.
Déterminer des valeurs approchées, à 10^{-3} près, de la probabilité de chacun des deux événements du 1 b).

C) On considére maintenant que la variable aléatoire Y, qui à toute tige de la production associe sa longueur suit la loi normale de moyenne m = 80 et et d'écart-type $\sigma = 2,5$.

Dans ce qui suit on donnera, pour chaque résultat une valeur approchée, à 10^{-4} près.
1) Quelle est la probabilité qu'une tige prise au hasard dans la production ait une longueur comprise entre 77,5 et 82,5 ?
2) On accepte les pièces dont la longueur est comprise entre 77 et 86.
a) Quelle est la probabilité qu'une pièce soit acceptée ?
b) Quel est le pourcentage de pièces défectueuses ?