INTEGRATION

Continuité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un élément de I.
f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Une fonction f est continue sur un intervalle si et seulement si elle est continue en tout élément de cet intervalle.

Intégrale d'une fonction continue positive sur [a ; b].

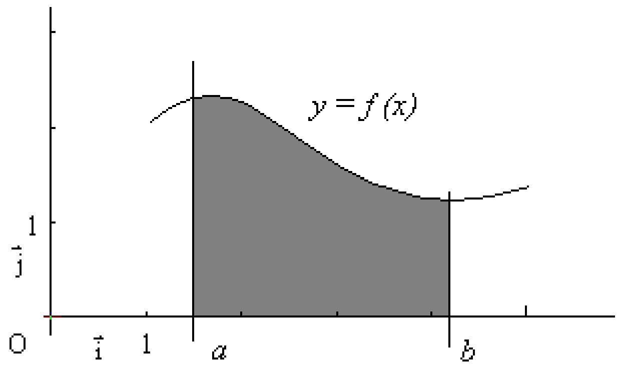
Définition.

Soit a et b deux réels d'un intervalle I avec $a < b$ et f une fonction continue positive sur I.
L'intégrale de a à b de la fonction f, notée $\int_a^b f(x)dx$, est le réel $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur I.
On note $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Etant donné un point a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur 0 au point a.

Interprétation géométrique.

Lorsque f est une fonction continue et positive sur un intervalle I, a et b étant deux réels de I tels que $a < b$, l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est: $\int_a^b f(x)dx$.
(Attention: le résultat est donné en unités d'aire)



Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque sur [a ; b].

Soit a et b deux réels d'un intervalle I avec $a < b$ et f une fonction continue de signe quelconque sur I.
On peut étendre la formule précédente à ce cas et on a donc : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Attention, dans ce cas la valeur de l'intégrale ne représente plus l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

INTEGRATION

Propriétés.

$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$; $\int_a^a f(x)dx = 0$;

Relation de Chasles.

Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$ et si $c \in [a ; b]$, alors :
$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

Linéarité.

Si f et g sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle $[a ; b]$ et λ un réel, on a :
$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$ et $\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$

Intégrales et inégalités

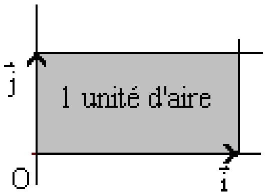
Soit f et g sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle $[a ; b]$
Si sur $[a ; b]$ $f \leq g$ alors : $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

p.215 : 4, 7, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 25, 29, 30, 32, 33, 35, 36, 38, 41, 44, 46, 48, 49, 50, 51, 54, 55, 58, 61, 66	p.200 : ER1, ER2 ; p.215 : 1 à 52 verts, 56, 62, 64

INTEGRATION

Calcul d’aire.

Attention: les résultats sont donnés en unités d’aire.
L’unité d’aire est égale à la mesure de l’aire du rectangle dont les côtés ont pour mesures les normes des vecteurs unitaires.

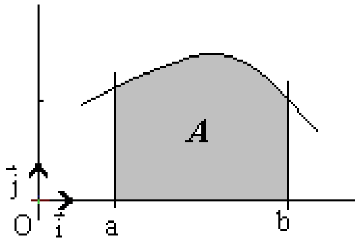


Aire comprise entre une courbe et l’axe des abscisses.

Soit ***A*** l’aire comprise entre la courbe représentative d’une fonction *f*, l’axe des abscisses, et les droites d’équations $x = a$ et $x = b$.

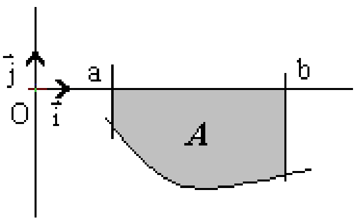
1) Si f est une fonction positive et intégrable sur $[\, a , b \,]$

$$\boldsymbol{A} = \int_a^b f(x)dx$$



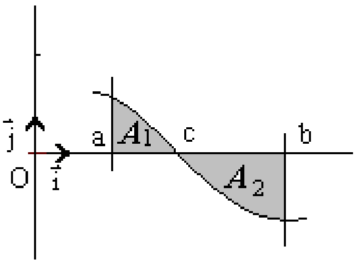
2) Si f est une fonction négative et intégrable sur $[\, a , b \,]$

$$\boldsymbol{A} = -\int_a^b f(x)dx$$



3) Si f est une fonction positive sur $[\, a , c \,]$, négative sur $[\, c , b \,]$:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{A_2} = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$



p.220 : 68, 70, 71, 72, 73	p.203 : ER3 ; p.219 : 67, 69

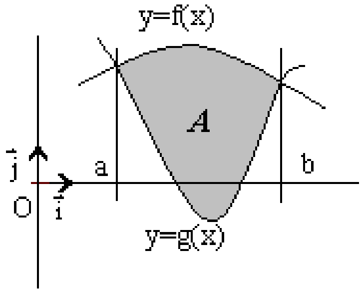
INTEGRATION

Aire comprise entre deux courbes.

Soit ***A*** l'aire comprise entre les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

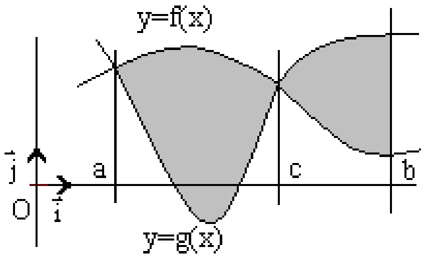
1) Si sur [a , b] , $f \geq g$, alors :

$\boldsymbol{A} = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$



2) Si sur [a , c] , $f \geq g$ et si sur [c , b] , $g \geq f$, alors :

$\boldsymbol{A} = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$



p.229 : 102	

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.

Si *f* est une fonction définie et continue sur un intervalle [a ; b] ,

on appelle valeur moyenne de *f* sur [a ; b] le réel : $\mu = \dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$.

L'intégrale de la fonction *f* sur l'intervalle [a ; b] est l'aire du rectangle dont les côtés ont pour longueur μ et (b – a) .

p.221 : 76, 77, 79, 82, 83, 85	p.221 : 78, 80

Problèmes :

p.221 : 74, 87, 103, 111	p.229 : 104, 107, 112, 116 DM : p.221 :75, 105, 115

Logiciels et algorithmique

p.210: TP2; p.235: 118	p.224 : 91