

FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE a et LOGARITHME DECIMAL¹

1. FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE a

Définition.

On appelle fonction exponentielle de base a toute fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = a^x \text{ avec } a \text{ réel strictement positif.}$$

Propriétés. Soit a réel un strictement positif.

Pour tout réel x , $a^x > 0$

Pour tous réel x, y :

$a^0 = 1$	$a^1 = a$	$a^x \times a^y = a^{x+y}$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$(ab)^x = a^x b^x$	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$	$(a^x)^y = a^{xy}$

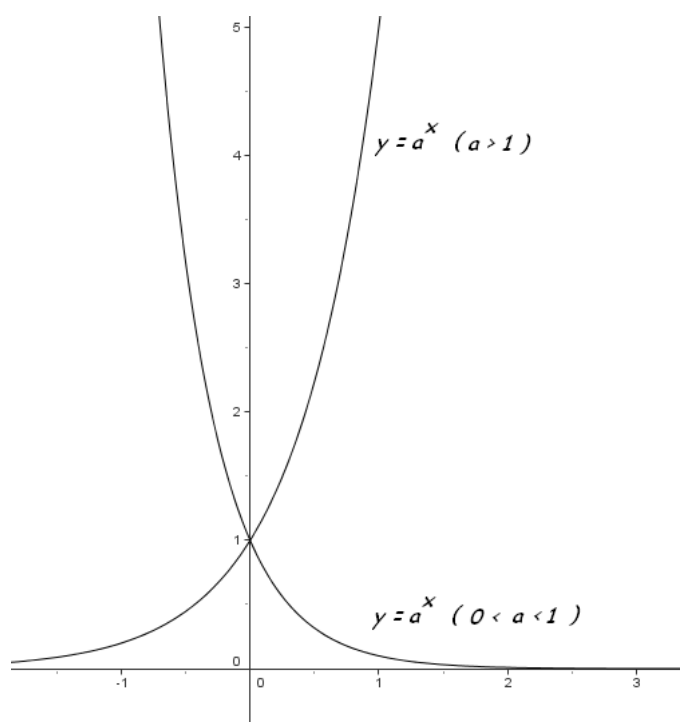
Sens de variation de la fonction $x \mapsto a^x$

Soit a réel un strictement positif.

- lorsque $a > 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$
- lorsque $0 < a < 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$

Conséquences :

- lorsque $a > 1$, $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$
- lorsque $0 < a < 1$, $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$
- lorsque $a \neq 1$, $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$



p.136 : 7, 8, 9, 10, 21, 23, 24, 26, 28, 29, 60, 61, 65

p.127 : 1, 2, p.137 : 22, 25, 27

FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE a et LOGARITHME DECIMAL²

2. FONCTION LOGARITHME DECIMAL.

Définition.

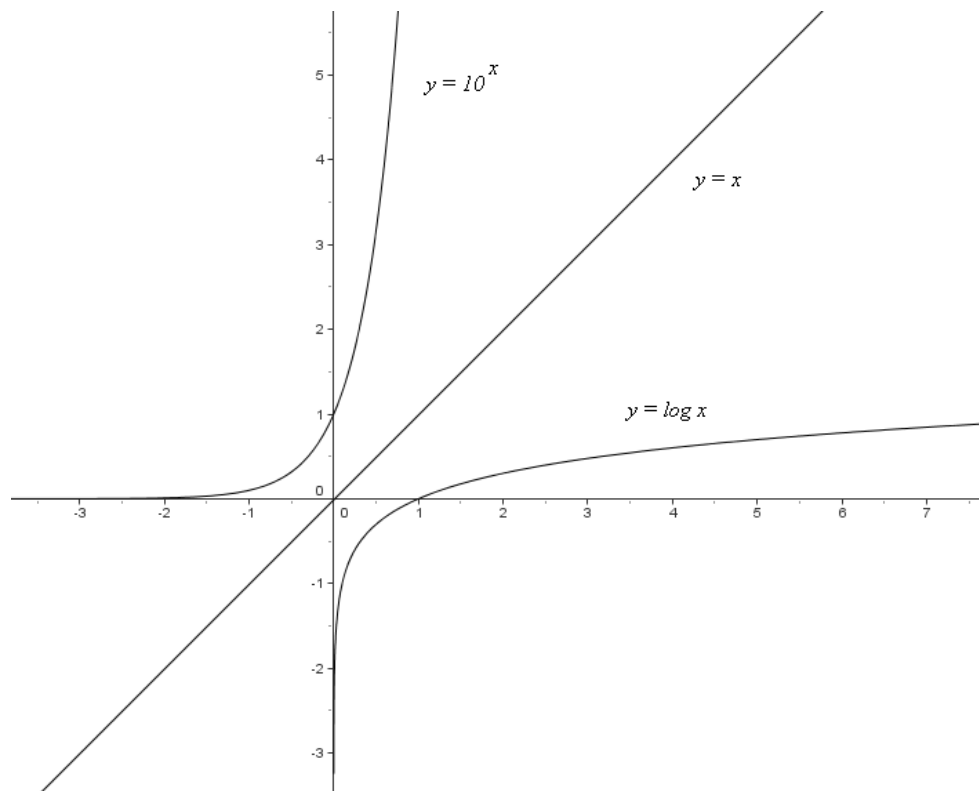
On appelle fonction logarithme décimal la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log : x \mapsto \log x$.

Cette fonction est la réciproque de la fonction : $x \mapsto 10^x$.

Les courbes de ces deux fonctions sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

Pour tout réel $x > 0$: $y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$

Courbe :



Propriétés de la fonction logarithme décimal.

- $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$
- Pour tout nombre réel a , $\log(10^a) = a$

La fonction logarithme décimal étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$,

- pour tous nombres réels a et b strictement positifs : $\log a = \log b \Leftrightarrow a = b$
- pour tous nombres réels a et b strictement positifs : $a \leq b \Leftrightarrow \log a \leq \log b$
- pour tout nombre réel x tel que $0 < x < 1$, $\log x < 0$
- pour tout nombre réel x tel que $x > 1$, $\log x > 0$

FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE a et LOGARITHME DECIMAL³

Propriétés algébriques.

Pour tous réels x et y strictement positifs, pour tout réel n :

$\log(xy) = \log x + \log y$	$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$	$\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x$
$\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$	$\log(x^n) = n \log x$	

p.136 : 11, 12, 33, 36, 38, p.141 : 62, 63	p.129 : 3, 4, p.138 : 34, 37, 39
--	----------------------------------

Equations et inéquations du type $a^x = b$, $a^x > b$, $a^x < b$

On résout de la façon suivante :

$$a^x = b \Leftrightarrow \log(a^x) = \log b \Leftrightarrow x \log a = \log b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$$

Lorsque $a > 1$

$$a^x < b \Leftrightarrow \log(a^x) < \log b \Leftrightarrow x \log a < \log b \Leftrightarrow x < \frac{\log b}{\log a} \quad (\text{car : } \log a > 0)$$

Lorsque $0 < a < 1$

$$a^x < b \Leftrightarrow \log(a^x) < \log b \Leftrightarrow x \log a < \log b \Leftrightarrow x > \frac{\log b}{\log a} \quad (\text{car : } \log a < 0)$$

On utilise en particulier ces équations pour déterminer à partir de quel rang les termes d'une suite géométrique deviennent inférieurs (ou supérieurs) à un certain seuil

p.140 : 51, 54, 56, 58, 59	p.131 : 5, 6, p.138 : 47, 50, 55, 57
----------------------------	--------------------------------------

Problèmes

p.138 : 42, 70, 71, 79, 82, 89 DM : p.149 : 90, 91	
---	--

QCM : p.135, p.137 : 30, 45, 49, 67, 69, 77, 87	A retenir : p.134	Pour réussir : p.147
---	-------------------	----------------------