Produit scalaire

Produit scalaire

Coordonnées d'un vecteur du plan.

Soit (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.

Soit A ($x_A ; y_A$) et B ($x_B ; y_B$) dans (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Norme d'un vecteur du plan.

Soit $\vec{u}$ ($x ; y$) dans un repère orthonormé, A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\|\vec{u}\| = AB = \sqrt{x^2 + y^2}$

p.284 : 3	p.283 : 2

Produit scalaire de deux vecteurs quelconques du plan.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u} \bullet \vec{v}$ est le réel:

$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$

Expression analytique du produit scalaire :

Soit $\vec{u}$ ($x ; y$) et $\vec{v}$ ($x' ; y'$) dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), $\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy'$

Vecteurs orthogonaux :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie

- que l'un des deux est nul
- ou que les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$

$\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur du plan.

p.284 : 6, 9, 10, 12	p.284 : 5, 7, 8, 11

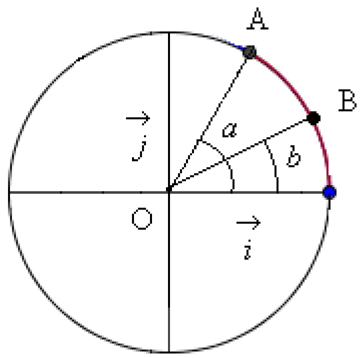
Formules d'addition, de duplication et de linéarisation

Formules d'addition

Pour tous réels a et b :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Démonstration : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$



On considère :

un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$
le cercle trigonométrique.

A et B les points du cercle tels que : $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b$

On a $\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OA} = OB \times OA \times \cos(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \cos(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$

Et d'après Chasles $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OB}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OA}) - (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = a - b$

Donc $\cos(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \cos(a-b)$

Or A $(\cos a ; \sin a)$ et B $(\cos b ; \sin b)$ donc $\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OA} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Donc: $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Démonstration : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Démonstration : $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$$\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b$$

D'où : $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Démonstration : $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin(a-(-b)) = \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

	p.270: ER1

Produit scalaire

Formules de duplication

Pour tout réel a :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$= 2\cos^2 a - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

Démonstration : $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$$
$$\cos^2 a - \sin^2 a = (1-\sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$$

Démonstration : $\sin 2a = 2\sin a \cos a$

$$\sin 2a = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2\sin a \cos a$$

Formules de linéarisation

Pour tout réel a :

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

On déduit des deux formules précédentes: $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

p.285 : 15, 17, 19, 22, 23	p.285 : 14, 16, 20, 21