

Limite d'une fonction

1. Limite finie en l'infini.

Soit f une fonction définie dans un intervalle $]a ; +\infty[$, a étant un réel.

Soit L un réel, la fonction f tend vers L quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si $|f(x) - L|$ tend vers 0 (c'est-à-dire la distance entre $f(x)$ et L tend vers 0) **pour x assez grand.**

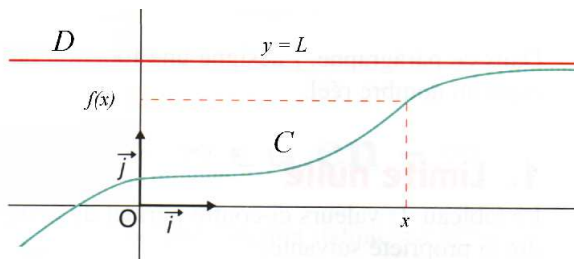
On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{+\infty} f = L$.

Soit f une fonction définie dans un intervalle $] -\infty ; a [$, a étant un réel.

Soit L un réel, la fonction f tend vers L quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si $|f(x) - L|$ tend vers 0 (c'est-à-dire la distance entre $f(x)$ et L tend vers 0) **pour x assez grand négatif.**

On note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{-\infty} f = L$.

Asymptote horizontale. Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, la courbe représentative de la fonction f admet pour asymptote la droite d'équation $y = L$ en $+\infty$. (énoncé analogue en $-\infty$)



Exemple :

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x} + 2$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe de f .

2. Limite infinie d'une fonction en a (a réel).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I tel que $I =]a ; b]$ ou $I = [b ; a[$

La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si et seulement si $f(x)$ devient de plus en plus grand **lorsque x se rapproche de a .**

On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_a f = +\infty$

La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a si et seulement si $f(x)$ devient de plus en plus grand négatif **lorsque x se rapproche de a .**

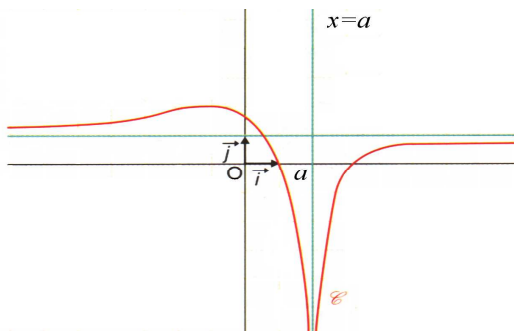
On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ou $\lim_a f = -\infty$.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Que constate-t-on lorsque x est proche de 0 ?

A partir de quelle valeur de x a-t-on $f(x) \geq 1000$? Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Asymptote verticale. Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, la courbe représentative de la fonction f admet pour asymptote la droite d'équation $x = a$. (idem lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$)



Technique : on décompose en $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ après avoir étudié le signe du dénominateur.

Exemple: Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{x^2-1}$ puis $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x^2-1}$ et en déduire l'existence d'asymptotes à la courbe de f .

3. Limite infinie en l'infini.

Soit f une fonction définie dans un intervalle $]a; +\infty[$, a étant un réel.

La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si $f(x)$ devient de plus en plus grand **pour x assez grand**.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2$. Que constate-t-on lorsque x devient grand? A partir de quelle valeur de x a-t-on $f(x) \geq 1000$? Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si pour $f(x)$ devient de plus en plus grand négatif **pour x assez grand**.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = -\infty$.

Soit f une fonction définie dans un intervalle $] -\infty; a[$, a étant un réel.

La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si $f(x)$ devient de plus en plus grand **pour x assez grand négatif**.

On note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = +\infty$.

La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si $f(x)$ devient de plus en plus grand négatif **pour x assez grand négatif**.

On note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = -\infty$.

3. Limites de référence Soit n un entier naturel **non nul**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
Lorsque n est pair : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$	lorsque n est impair : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
Lorsque n est pair : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$	lorsque n est impair : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$
Lorsque f est une fonction polynôme, rationnelle, sinus, cosinus ou racine carrée définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I , on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$	

4. Opérations sur les limites.

Les résultats concernant la limite d'une somme, la limite d'un produit ou la limite d'un quotient de fonctions lorsque x tend vers un réel a sont intuitivement évidents. De même que « l'inverse d'un infiniment grand est un infiniment petit » et « l'inverse d'un infiniment petit est un infiniment grand ».

Il existe cependant quatre cas de formes indéterminées qui nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront: $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$

p.69 : 1 à 4

Limite d'une fonction polynôme ou rationnelle en l'infini.

La technique consiste à mettre en facteur le terme de plus haut degré.

Exercice

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x + 2}{2x - 3}$

p.70 : 7 ; p.71 : 14, 16, 18, 22, 26

p.70: 6, 10; p.71 : 13, 15

Limite d'une fonction composée.

Une fonction composée est une fonction de la forme $f(u(x))$

Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{u \rightarrow b} f(u) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(u(x)) = c$.

Exercice

Déterminer les limites suivantes:

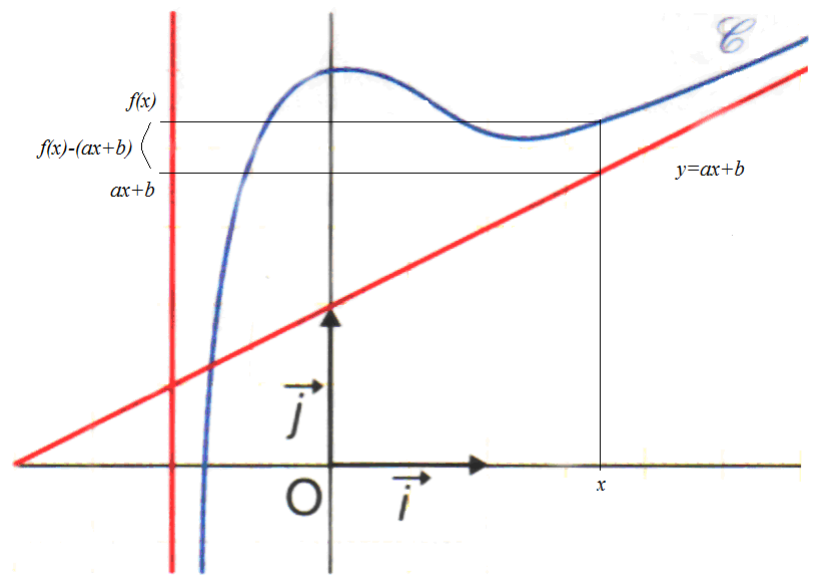
a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 5)^5$

TP : Asymptote oblique.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, la courbe représentative de la fonction f admet pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$ (énoncé analogue en $-\infty$)



Position courbe/asymptote horizontale ou oblique .

On étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$
 Si sur un intervalle I $f(x) - (ax + b) > 0$, la courbe est au-dessus de l'asymptote sur I.
 Si sur un intervalle I $f(x) - (ax + b) < 0$, la courbe est au-dessous de l'asymptote sur I.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $] -2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 2}{x + 2}$

Déterminer a , b et c réels tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$

En déduire l'existence d'une asymptote oblique à la courbe représentative de f et étudier les positions relatives de la courbe et de l'asymptote.

p.73 : 30, 31

p.72 : 28

Exercices et problèmes.

p.70 : 8 ; p.73 : 32 ; p.74 : 35, 36 ; p.82 : 63, 64, 65

p.72 : 24 ; p.74 : 34 ; p.79 : 56 ; p.81 : 62

DM : p.75 : 41 ; p.76 : 46