

1. Généralités sur les suites.

Définition .

Une suite numérique est une fonction de N ou d'une partie de N dans R $u : N \rightarrow R$
 $n \mapsto u(n)$

Le réel $u(n)$ se note u_n et est appelé terme générale de la suite ou terme d'indice n .

On note aussi la suite u par (u_n) ou $(u_n)_{n \in N}$.

Nous allons nous intéresser à deux types de suites:

- Suites définies par la donnée explicite de leurs termes: pour tout n de N on a $u_n = f(n)$

Exercice 1:

$u_n = 2n - 3$ pour tout naturel n .

Calculer u_1, u_3, u_7, u_{10} .

- Suites définies par récurrence:

Dire que la suite u est définie par récurrence signifie que le premier terme u_0 de la suite est donné, et que l'on a pour tout naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 2:

$u_n = 5u_{n-1} - 2$ pour tout naturel $n > 0$, et $u_0 = 3$.

Calculer u_1, u_3, u_7, u_{10} .

Suite géométrique.

Dire que la suite (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un réel q appelé raison de la suite tel que pour tout naturel n : $u_{n+1} = qu_n$.

Détermination d'un terme quelconque.

Quels que soient les naturels m et p , $u_m = u_p q^{(m-p)}$.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Lorsque $q \neq 1$: $\sum_{i=0}^n q^i = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Soit une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q :

$$\sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_0 \times q + \dots + u_0 \times q^n = u_0 \times (1 + q + \dots + q^n) = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Si le premier terme n'est pas u_0 , $u_p + u_p \times q + \dots + u_p \times q^n = u_p \times (1 + q + \dots + q^n) = u_p \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Ce que l'on peut aussi écrire sous la forme : $u_p \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{u_p - u_p \times q^{n+1}}{1 - q} = \frac{u_p - u_p \times q^n \times q}{1 - q}$

$u_p \times q^n$ est le dernier terme de la somme, notons le u_d .

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique, du premier u_p au dernier u_d peut donc

s'écrire $\frac{u_p - u_d \times q}{1 - q}$

p.29 : 12, 13, 16, 17, 20, 25, 28, 35

p.17 : ER3, p.29 : 11, 14, 19, 24, 32.

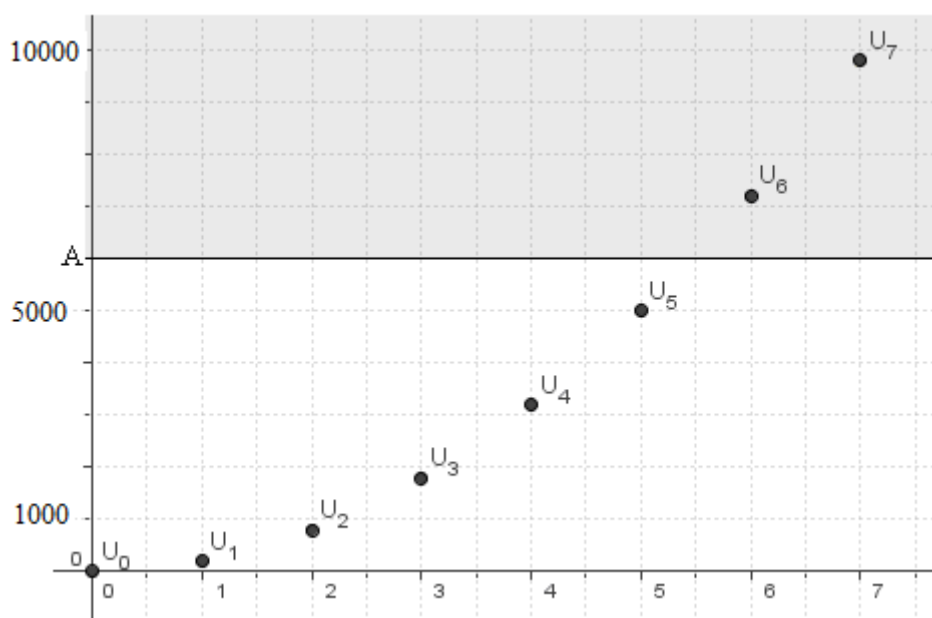
2. Limite d'une suite.

Suites divergentes.

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ ou encore qu'elle diverge vers $+\infty$ lorsque, pour tout entier naturel p , on peut trouver un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont supérieurs à 10^p .

La suite (u_n) est dite divergente. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$



Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2n^2 + 3$ pour tout entier naturel n .

Calculer et représenter graphiquement les 5 premiers termes de cette suite.

A partir de quel rang a-t-on $u_n > 10$, $u_n > 10^2$, $u_n > 10^3$?

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ ou encore qu'elle diverge vers $-\infty$ lorsque, pour tout entier naturel p , on peut trouver un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à -10^p .

La suite (u_n) est dite divergente. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Limites de référence :

Pour tout entier naturel k non nul : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$

p.28 : 2, 4

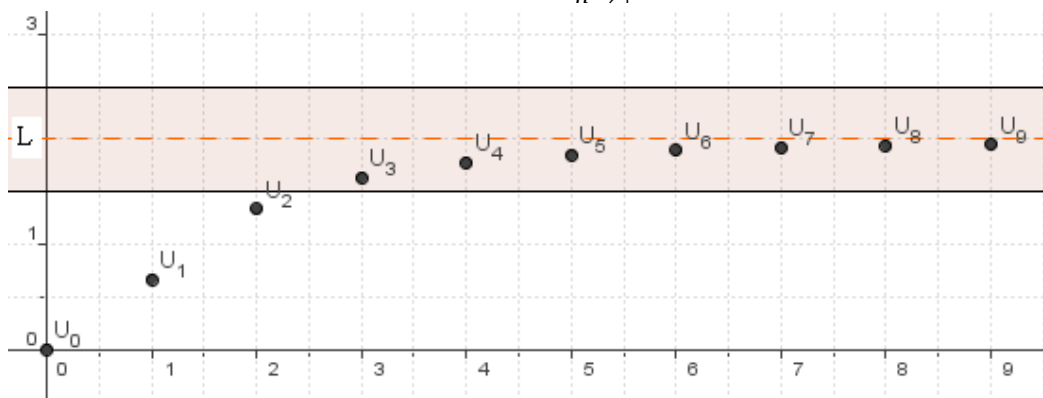
p.28 : 1

Suites convergentes.

Soit (u_n) une suite de nombres réels et L un nombre réel.

On dit que la suite (u_n) converge vers L (ou que la suite (u_n) a pour limite L) lorsque, pour tout entier naturel p , on peut trouver un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont à une distance de L inférieure à 10^{-p} , c'est-à-dire $|u_n - L| \leq 10^{-p}$.

Dans ce cas, la suite (u_n) est dite convergente. On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$



p.28 : 7, 8

p.15 : ER2, p28 : 6,

Limites de référence :

Pour tout entier naturel p non nul : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$

Exercice :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{n} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} - 5 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

Limite de q^n

Lorsque $q > 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Lorsque $q = 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

Lorsque $0 < q < 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q :

Lorsque $q > 1$ et $u_0 > 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Lorsque $q > 1$ et $u_0 < 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Lorsque $q = 1$ la suite est constante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$

Lorsque $0 < q < 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

p.32 : 37, 38

p.32 : 36

Logiciels et algorithmique

p.22 : TP2, TP4

p.33 : 40, 42, 43 ; p.39 : 58

Exercices et problèmes.

p.33 : 41, 44

DM : p.38 : 55, 61

p.37 : 49 à 53, p.38 : 54