Limite d'une fonction

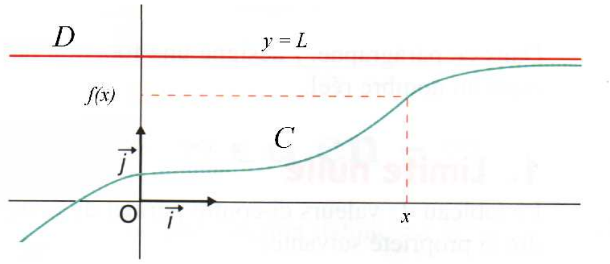
1. Limite finie en l'infini.

Soit f une fonction définie dans un intervalle $]\, a\, ; +\infty [$, a étant un réel.
Soit L un réel, la fonction f tend vers L quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si $|f(x) - \mathrm{L}|$ tend vers 0 (c'est-à-dire la distance entre $f(x)$ et L tend vers 0) **pour x assez grand.**
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = \mathrm{L}$.

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $]\, 0\, ; +\infty [$ par $f(x) = \dfrac{3}{x}$. Que constate-t-on lorsque x devient grand?
Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Soit f une fonction définie dans un intervalle $]\, -\infty\, ; a\, [$, a étant un réel.
Soit L un réel, la fonction f tend vers L quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si $|f(x) - \mathrm{L}|$ tend vers 0 (c'est-à-dire la distance entre $f(x)$ et L tend vers 0) **pour x assez grand négatif.**
On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{L}$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = \mathrm{L}$.

Asymptote horizontale. Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$, la courbe représentative de la fonction f admet pour asymptote la droite d'équation $y = \mathrm{L}$ en $+\infty$. (énoncé analogue en $-\infty$)



Exemple :
Soit la fonction f définie sur $]\, 0\, ; +\infty [$ par $f(x) = \dfrac{3}{x} + 2$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe de f.

2. Limite infinie d'une fonction en a (a réel).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I tel que I =] a ; b] ou I = [b ; a [

La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si et seulement si $f(x)$ devient de plus en plus grand **lorsque** x **se rapproche de** a.

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = +\infty$

La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a si et seulement si $f(x)$ devient de plus en plus grand négatif **lorsque** x **se rapproche de** a.

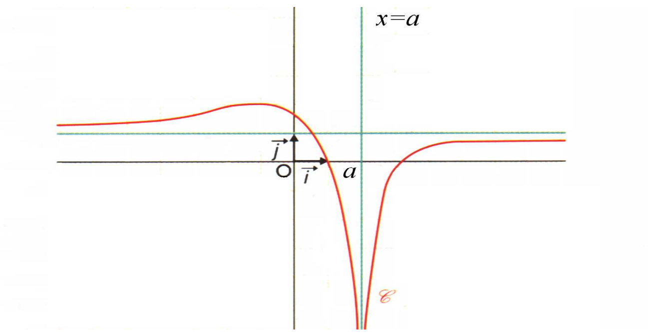
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = -\infty$.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur] 0 ; $+\infty$[par $f(x) = \frac{1}{x}$. Que constate-t-on lorsque x est proche de 0 ?

A partir de quelle valeur de x a-t-on $f(x) \geq 1000$? Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Asymptote verticale. Lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, la courbe représentative de la fonction f admet pour asymptote la droite d'équation $x = a$. (idem lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$)



Technique :on décompose en $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ après avoir étudié le signe du dénominateur.

Exemple: Calculer $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x-1}{x^2-1}$ puis $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x-1}{x^2-1}$ et en déduire l'existence d'asymptotes à la courbe de f.

p.51 : TP1	

3. Limite infinie en l'infini.

Soit f une fonction définie dans un intervalle $]\, a\,;+\infty\,[$, a étant un réel.

La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si $f(x)$ devient de plus en plus grand **pour *x* assez grand.**
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si pour $f(x)$ devient de plus en plus grand négatif **pour *x* assez grand.**
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

Soit f une fonction définie dans un intervalle $]-\infty\,;a\,[$, a étant un réel.

La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si $f(x)$ devient de plus en plus grand **pour *x* assez grand négatif.**
On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si et seulement $f(x)$ devient de plus en plus grand négatif **pour *x* assez grand négatif.**
On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

3. Limites de référence

Soit n un entier naturel **non nul**

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
Lorsque n est pair : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$	lorsque n est impair : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
Lorsque n est pair : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$	lorsque n est impair : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$
Lorsque f est une fonction polynôme, rationnelle, sinus, cosinus ou racine carrée définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$	

4. Opérations sur les limites.

Les résultats concernant la limite d'une somme, la limite d'un produit ou la limite d'un quotient de fonctions lorsque x tend vers un réel a sont intuitivement évidents. De même que « l'inverse d'un infiniment grand est un infiniment petit » et « l'inverse d'un infiniment petit est un infiniment grand ».

Il existe cependant quatre cas de formes indéterminées qui nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront: $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$

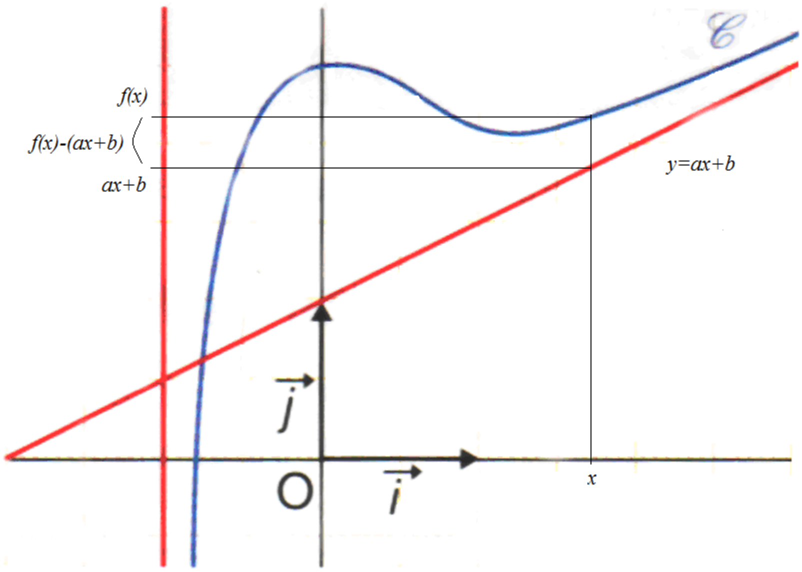
Limite d'une fonction polynôme ou rationnelle en l'infini.

La technique consiste à mettre en facteur le terme de plus haut degré.

p.58 : 7 ; p.59 : 14, 17, 18, 19, 22, 26 ; p.62 : 35, 38, 39 p.63 : 42, 46	p.42 : ER2, p.57 : 1 à 4 p.41: ER1, p.45: ER3; p.58: 5, 6, 8 à 10, 13, 15, 20, 24, 25 ; p.62 : 34

TP : Asymptote oblique.

Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$, la courbe représentative de la fonction f admet pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$ (énoncé analogue en $-\infty$)



Position courbe/asymptote horizontale ou oblique .

On étudie le signe de $f(x) - (ax+b)$

Si sur un intervalle I $f(x) - (ax+b) > 0$, la courbe est au-dessus de l'asymptote sur I.

Si sur un intervalle I $f(x) - (ax+b) < 0$, la courbe est au-dessous de l'asymptote sur I.

p.61 : 30, 31 ; p.63 : 41	p.47 : ER4, p.60 : 27, 28

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-2}{x+2}$

Déterminer a, b et c réels tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$

En déduire l'existence d'une asymptote oblique à la courbe représentative de f et étudier les positions relatives de la courbe et de l'asymptote.

La courbe représentative de f admet-elle une autre asymptote ?

Si oui, donner son équation.

Exercices et problèmes.

p.66 : 54, 61, 62	p.66 : 56, 59 DM : 55 p.66