FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Définition:

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur] 0 ; + ∞ [et qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.

Etude de la fonction.

$$\ln : \ ]0 ; +\infty[\ \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \ln x$$

La fonction logarithme népérien est définie, continue et dérivable sur] 0 ; + ∞ [

Limites : $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

La courbe représentative de la fonction présente une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

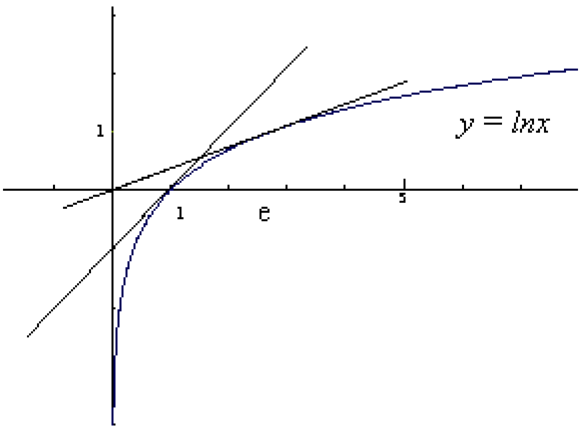
Fonction dérivée: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Variations : La fonction est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [.

Valeurs particulières : ln 1 = 0 ; ln e = 1 (avec e = 2,71828...)

La fonction ln étant strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [, et ln 1 = 0, on en déduit :
Lorsque $0 < x < 1$: $\ln x < 0$ et lorsque $x > 1$: $\ln x > 0$

Courbe représentative:



Limites à connaître: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ avec n entier naturel non nul

p.117 : 13, 14, 18 p.118 : 24, 25, p.119 : 42, 43	p.117 : 8à12, p.118 :19à23

Propriétés:

a et b étant des réels strictement positifs et n un entier relatif.

$\ln a + \ln b = \ln ab$	$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$	$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$	$\ln(a^n) = n \ln a$	$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

Equations et inéquations.

Equation $\ln x = \text{m}$.

La fonction ln étant strictement croissante de] 0 ; + ∞ [sur $\boldsymbol{R}$, pour chaque nombre réel m, l'équation $\ln x = \text{m}$ admet une solution unique dans] 0 ; + ∞ [. On note e^{m} la solution de l'équation $\ln x = \text{m}$.

Equation ln a = ln b avec a > 0 et b > 0.

La fonction ln étant strictement croissante de] 0 ; + ∞ [sur $\boldsymbol{R}$, l'équation ln a = ln b équivaut à a = b .

Inéquation ln a < ln b avec a > 0 et b > 0.

La fonction ln étant strictement croissante de] 0 ; + ∞ [sur $\boldsymbol{R}$, l'équation ln a < ln b équivaut à a < b .
(idem avec > ;≤;≥)

p.116 : 2, 3, 5, 7	p.116 : 1, 6

Fonctions de la forme ln (u(x))

Limites.

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\boldsymbol{R}$ avec $u(x) > 0$ sur I.

a peut être soit un réel , soit $+\infty$ soit $-\infty$

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ (b réel strictement positif) alors $\lim\limits_{x \to a} \ln(u(x)) = \ln b$

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} \ln(u(x)) = +\infty$

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} \ln(u(x)) = -\infty$

p.117 : 16, 17	p.117 : 15

Dérivée:

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, la fonction

ln (u) : $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I: ln' (u(x)) = $\frac{u'(x)}{u(x)}$

p.118 : 26 à 29	

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Primitives : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que, pour tout x élément de I, $u(x) \neq 0$. Alors la fonction $f = \frac{u'}{u}$ admet des primitives sur I, et ces primitives sont de la forme : $x \mapsto \ln(|u(x)|) + c$, avec c réel.

p.119 : 36 à 41	p.118 : 30 à 35

Fonction logarithme décimal

La fonction logarithme décimal est la fonction, notée log, définie sur] 0 ; +∞ [par :

log : $x \mapsto \log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Résolution d'une équation comportant un logarithme décimal

Soit y un réel, et x un réel strictement positif : $y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$

EXERCICE . La concentration en ions H_3O^+ d'une solution aqueuse est $1{,}75 \times 10^{-12}$ mol.l^{-1} .
Sachant que pH = $-\log[H_3O^+]$ calculer le pH de cette solution.
Quelle est la concentration en ions H_3O^+ d'une solution de pH = 6 ?

p.121 : 51 à 53	

Problèmes.

p.119 : 45, 47 p.125 : 63, 65, 73, 74, 76, 78	p.126 : 67, 69 DM : 49 p.120 ; p.127 : 68