PROBABILITES

Lois de probabilité continue (ou à densité).

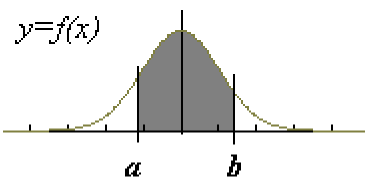
Lorsque l'univers d'une expérience aléatoire est un ensemble fini, la loi de probabilité définie sur cet ensemble fini de valeurs est une loi discrète.
Lorsque les issues d'une expérience ou les valeurs prises par une variable aléatoire peuvent être n'importe quel nombre d'un intervalle I de ***R***, on parle de loi continue.

Soit I un intervalle de ***R***.
On appelle densité de probabilité sur I toute fonction f définie sur I vérifiant les trois conditions suivantes :

- f est continue sur I
- f est positive sur I
- l'aire située sous sa courbe C est égale à une unité d'aire

On définit la loi de probabilité p de densité f sur l'intervalle I en associant à tout intervalle $[a ; b]$ inclus dans I le réel : $p\,([a ; b]) = \int_a^b f(x)\,dx$
On dit que p est une loi de probabilité à densité sur I ou une loi continue sur I.

$$p\,([a ; b]) = p\,(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx\ ;$$



$p\,(X = a)$ est nulle (aire d'un segment), donc on peut utiliser indifféremment < ou ≤ dans l'écriture de la probabilité $p\,(a \leq X \leq b)$

Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f, définie un intervalle I de ***R***.
L'espérance de X est : $E\,(X) = \int_I x f(x)\,dx$

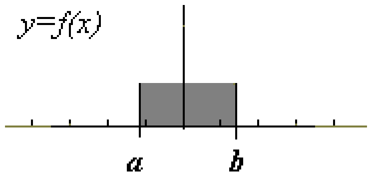
La variance de X est : $V\,(X) = \int_I (x - E(x))^2 f(x)\,dx$

L'écart-type de X est $\sigma\,(X) = \sqrt{V(X)}$

PROBABILITES

La loi uniforme.

On, appelle loi uniforme sur l'intervalle I = [a ; b] de $\boldsymbol{R}$, la loi de probabilité continue sur I dont la densité f est la fonction constante égale à $\frac{1}{b-a}$.



Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle [$\alpha ; \beta$] inclus dans I = [a ; b] est égale au quotient de la longueur de [$\alpha ; \beta$] par celle de [a ; b]

$$p\,([\ \alpha ; \beta\ ]) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle I = [a ; b] de $\boldsymbol{R}$,

L'espérance de X est : $E\,(X) = \int_{a}^{b} x f(x)\, dx = \frac{a+b}{2}$

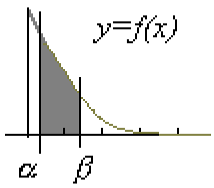
La variance de X est : $V\,(X) = \int_{I} (x - E(x))^2 f(x)\, dx = \frac{(b-a)^2}{12}$

L'écart-type de X est $\sigma\,(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

p.287 : 2, 3, p.295 : 34	p.256 : ER1, p.287 : 1

La loi exponentielle.

On appelle loi exponentielle de paramètre λ la loi continue admettant pour densité la fonction f définie sur [0 ; $+\infty$ [par $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$ ou λ est un réel positif fixé.



Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle [$\alpha ; \beta$] inclus dans [0 ; $+\infty$ [est égale à :

$$p\,([\ \alpha ; \beta\ ]) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = [-e^{-\lambda x}]_{\alpha}^{\beta} = -e^{-\lambda\beta} + e^{-\lambda\alpha} = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$$

On peut donc écrire : $p\,(\mathrm{X} \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = -e^{-\lambda x} + e^0 = 1 - e^{-\lambda x}$

et donc $p\,(\mathrm{X} > x) = 1 - p\,(\mathrm{X} \leq x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$

Dans le cas de la loi exponentielle : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$; $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$

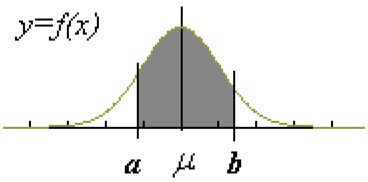
PROBABILITES

Loi exponentielle et tableur.

Le calcul de $p(X \leq k)$ à l'aide d'un tableur est réalisé avec l'instruction:
=LOI.EXPONENTELLE(k; λ ;VRAI)

p.288 : 4, 5, 7, 8, p.295 : 35, 37, 38	p.259 : ER2, p.288 : 6

La loi normale



On appelle loi normale $N(\mu, \sigma)$ de paramètres μ et σ la loi continue admettant pour densité la fonction f définie sur ***R*** par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

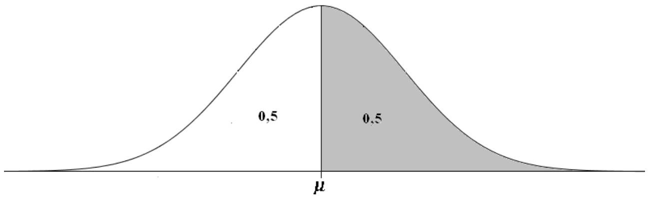
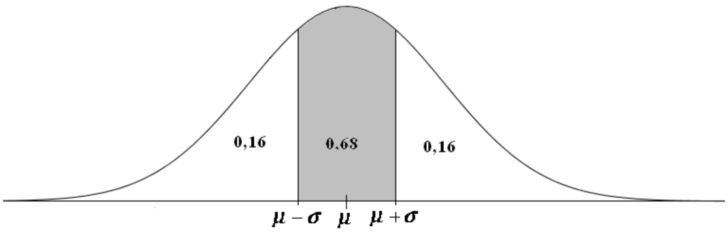
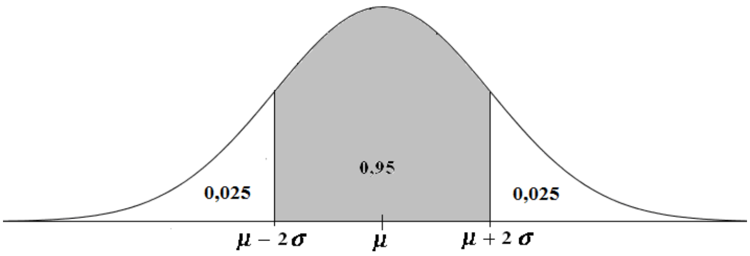
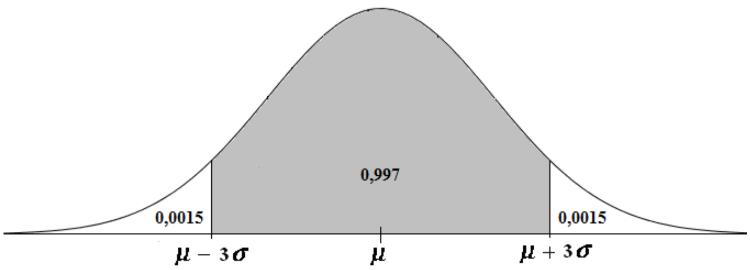
Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle [α ; β] est égale à :

$$p([\alpha;\beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Soit une variable aléatoire X suivant la loi normale $N(\mu , \sigma)$:
$E(X) = \mu$; $V(X) = \sigma^2$; $\sigma(X) = \sigma$

PROBABILITES

Propriétés (admises)

$p(X \geq \mu) = 0{,}5$	
$p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0{,}68$	
$p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}95$	
$p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0{,}997$	

Loi normale et tableur.

Le calcul de $p(X \leq k)$ à l'aide d'un tableur est réalisé avec l'instruction: $\boxed{\text{=LOI.NORMALE}(x;\mu;\sigma\text{;VRAI})}$

p.281: TP3, p.288: 11 à 15, 17, 19	p.263: ER3, p.288: 9, 10, 18

Rappel. Une loi discrète: la loi binomiale

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\,(\,n\,,\,p\,)$ de paramètres n et p, où n est un nombre entier naturel et p un nombre réel compris entre 0 et 1 lorsque sa loi de probabilité est définie de la manière suivante:

Pour tout nombre entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$: $\quad p\,(\,X = k\,) = \binom{n}{k}\, p^{k}\, q^{n-k}$ avec $q = 1 - p$.

Propriétés. Soit une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\,(\,n\,,\,p\,)$:

$E\,(\,X\,) = np$; $V\,(\,X\,) = npq$; $\sigma\,(\,X\,) = \sqrt{npq}$

Champ d'intervention. On l'utilise dans le cas d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, c'est à dire une succession de n épreuves identiques et indépendantes pouvant déboucher sur 2 résultats et 2 seulement (succès ou échec), la probabilité du succès étant p.

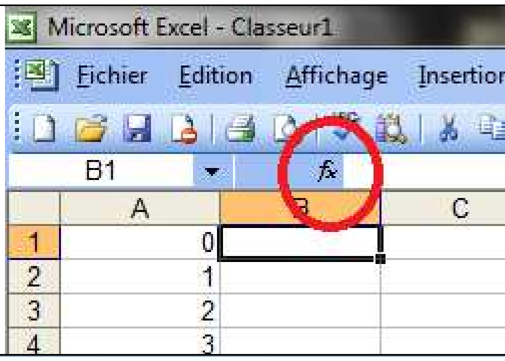
Dans le cas de tirages exhaustifs (sans remise), il n'y a plus indépendance entre les tirages. Cependant lorsque n est ''petit'' devant l'effectif total N, on peut considérer que X suit approximativement la loi binomiale.

Loi binomiale et tableur.

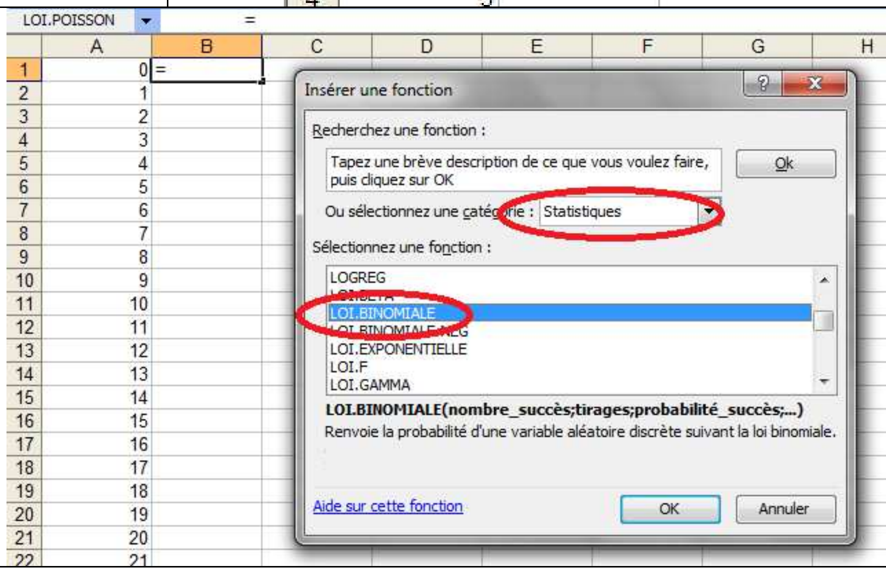
Le calcul de $p(X=k)$ à l'aide d'un tableur est réalisé avec l'instruction: `=LOI.BINOMIALE(k;n;p;FAUX)`

Le calcul de $p(X\leq k)$ à l'aide d'un tableur est réalisé avec l'instruction: `=LOI.BINOMIALE(k;n;p;VRAI)`

Pour insérer une commande de probabilité cliquer sur *fx*

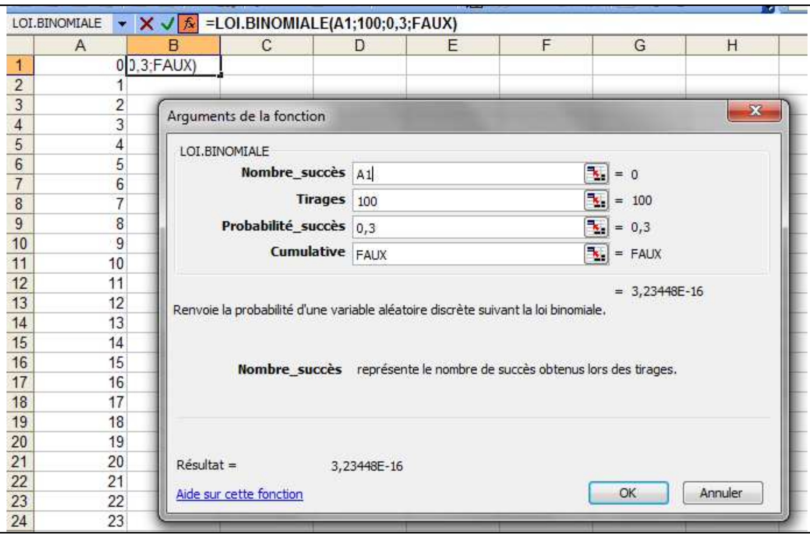


Puis choisir *Statistiques* et LOI.BINOMIALE



PROBABILITES

Dans la boîte de dialogue, renseigner la case indiquant le nombre de succès, le nombre d'épreuves *n*, la probabilité du succès *p* puis FAUX ou VRAI



p.279 : TP1, p.290 : 21 à 24	p.265 : ER4, p.289 : 20

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

On admet que si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ alors la loi binomiale $B(n, p)$ est très proche de la loi normale $N(\mu, \sigma)$ où $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Par cette approximation les calculs sont simplifiés, espérance mathématique et écart-type étant conservés.

p.290 : 26, 27	p.290 : 25

Problèmes

p.295 : 39, 42, 44, 46, 48	p.297 : 45

Devoir Maison

p.295 : 36, 40, 51	